

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

DYSCYPLINA NAUKOWA – MATEMATYKA/
DZIEDZINA NAUK – NAUKI ŚCISŁE I PRZYRODNICZE

Rozprawa doktorska

mgr Paweł Matraś

**Podalgebry algebr macierzy nad ciałem
spełniające tożsamości komutatorowe**

Promotor
dr hab. Michał Ziembowski

WARSZAWA 2025

Podziękowania

Pragnę serdecznie podziękować za nieocenioną pomoc mojemu promotorowi Michałowi Ziembowskiemu. Dziękuję również za nieustanne wsparcie całej rodziny, w szczególności mamy, taty, brata i babci, oraz przyjaciela Adama.

Streszczenie

Praca dotyczy podalgebr algebr macierzy nad dowolnym ciałem, które spełniają tożsamości wielomianowe zdefiniowane za pomocą komutatorów. Pokażemy, że maksymalne podalgebry algebr macierzy nad ciałem, które spełniają tożsamość wielomianową

$$[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_q, y_q] = 0$$

dla dowolnej liczby naturalnej $q \geq 2$, są sprzężone z pewnymi blokowo trójkątnymi podalgebrami algebr macierzy. Będziemy także analizować problemy sprzężoności i izomorfizmów w pewnych klasach blokowo trójkątnych podalgebr algebr macierzy. Ponadto sprawdzimy, kiedy algebry należące do takich klas mają jednoznaczne przedstawienie w postaci blokowej. Co więcej, dla dowolnej liczby naturalnej $q \geq 2$, znajdziemy największy wymiar podalgebry algebry macierzy nad dowolnym ciałem, która spełnia tożsamość wielomianową

$$[[x_1, y_1], z_1][[x_2, y_2], z_2] \dots [[x_q, y_q], z_q] = 0.$$

Przedstawimy również jej konstrukcję.

Słowa kluczowe: algebra macierzy, algebra z tożsamością wielomianową, komutator, macierze blokowe, izomorfizm algebr, sprzężenie podalgebr algebry macierzy

Abstract

This thesis investigates subalgebras of matrix algebras over an arbitrary field that satisfy polynomial identities involving commutators. We show that maximal subalgebras of matrix algebras over a field satisfying the polynomial identity

$$[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_q, y_q] = 0,$$

where q is an integer greater than or equal to 2, are conjugated to block triangular matrix algebras. We also investigate the conjugation problem and the isomorphism problem in some classes of block triangular subalgebras of matrix algebras. Moreover, we examine when algebras from these classes have a unique block triangular form. Furthermore, for an arbitrary natural number q greater than or equal to 2, we find the maximum dimension of a subalgebra of a matrix algebra over a field satisfying the polynomial identity

$$[[x_1, y_1, z_1]][[x_2, y_2, z_2]] \cdots [[x_q, y_q, z_q]] = 0$$

and we present a construction of a subalgebra with such dimension.

Keywords: matrix algebra, polynomial identity algebra, commutator, block matrices, isomorphism of algebras, conjugation of matrix algebras

Spis treści

Wprowadzenie	9
1 Informacje wstępne	15
2 Przemienne podalgebry algebry macierzy	27
2.1 Przemienne podalgebry algebry $M_n(K)$ maksymalnych wymiarów	27
2.2 Maksymalne przemienne podalgebry algebry $M_n(K)$	34
3 D_q podalgebry $M_n(K)$	40
3.1 Wprowadzenie i podstawowe definicje	40
3.2 Maksymalne D_q podalgebry $M_n(K)$	47
3.3 Sprzężenia D_q podalgebr I typu	52
3.4 O izomorfizmach D_q podalgebr II typu i izomorfizmach pełnych podalgebr blokowo trójkątnych	60
3.5 D_q podalgebry III typu	73
4 D_q podalgebry $U_n(K)$ i zanurzenia D_q podalgebr $M_n(K)$	83
4.1 D_q podalgebry $U_n(K)$	83
4.2 Zanurzenia D_{q-1} algebr I typu w D_q algebry	87
4.3 Postacie blokowe D_q podalgebr $M_n(K)$	106
5 Algebry rozwiązalne, nilpotentne oraz ich uogólnienia	112
5.1 Ln_q podalgebry $M_n(K)$	113
5.2 Algebry Ls_2 nie będące D_2 algebrami	118
5.3 O algebrach $U_n^*(\mathcal{A})$, gdzie $\mathcal{A}$ jest algebrą z tożsamością wielomianową . . .	124
5.4 LD_q podalgebry $M_n(K)$	129
Bibliografia	140

Wprowadzenie

Przedmiotem rozważań w niniejszej pracy są maksymalne podalgebry algebr macierzy o wyrazach w ciele, które spełniają tożsamości wielomianowe związane z komutatorami, gdzie komutatorem elementów x, y dowolnej algebry $\mathcal{A}$ nazywamy element $[x, y] = xy - yx$.

Zacniemy od zarysowania rozwoju teorii algebr z tożsamościami wielomianowymi, zwracając szczególną uwagę na tożsamości związane z komutatorami.

Intensywne badanie algebr z tożsamościami wielomianowymi i ich uogólnień – pierścieni z tożsamościami wielomianowymi rozpoczęło się od artykułu Kaplansky’ego [23] z 1948 roku. Uzyskano wyniki dotyczące struktury algebr spełniających tożsamości wielomianowe oraz poszukiwano opisu wszystkich tożsamości wielomianowych, które spełnia dana algebra. Podstawowe rezultaty w omawianym obszarze można znaleźć w książkach [21], [35], [40], które powstały do 1980 roku. Nowszymi pozycjami książkowymi wprowadzającymi w tę tematykę są na przykład [17] oraz obszerna monografia [1].

Rozważania dotyczące zachowania własności pierścieni oraz algebr przy wybranych operacjach algebraicznych są zarówno trudne, jak i bardzo interesujące. Na początku lat siedemdziesiątych Regev pokazał w artykułach [38] i [39], że iloczyn tensorowy dwóch algebr z tożsamościami wielomianowymi jest też algebrą z tożsamością wielomianową. W [5] Beidar i Mikhalev udowodnili, że jeśli podpierścienie R_1 i R_2 pierścienia R spełniają odpowiednio tożsamości wielomianowe

$$[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_{q_1}, y_{q_1}] = 0 \quad \text{ i } \quad [x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_{q_2}, y_{q_2}] = 0$$

dla dowolnych liczb naturalnych q_1, q_2 , oraz $R = R_1 + R_2$, to pierścień R spełnia pewną tożsamość wielomianową. Z tego powodu autorzy postawili pytanie: Czy jeżeli pierścień R można zapisać jako sumę podpierścieni $R_1 + R_2$, z których każdy spełnia pewne tożsamości wielomianowe, to także R spełnia jakąś tożsamość wielomianową? Stosunkowo niedawno, bo w 2017 roku, pozytywną odpowiedź na wspomniany problem podał Kępczyk w artykule [25].

W rozwoju teorii algebr z tożsamościami wielomianowymi ważne było następujące pytanie zadane przez Spechta w artykule [44]:

Czy dla dowolnej algebry $\mathcal{A}$ spełniającej pewną tożsamość wielomianową, istnieje skończony zbiór wielomianów nieprzemiennych zmiennych

$$\{f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}), f_2(x_1, x_2, \dots, x_{n_2}), \dots, f_k(x_1, x_2, \dots, x_{n_k})\}$$

dla pewnych liczb naturalnych $k, n_1, n_2, \dots, n_k$ taki, że każda tożsamość wielomianowa tej algebry jest sumą elementów postaci $u_i f_i(w_1, w_2, \dots, w_{n_i}) v_i$, gdzie $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, natomiast $u_i, w_1, w_2, \dots, w_{n_i}, v_i$ są pewnymi wielomianami nieprzemiennych zmiennych?

Gdy dla algebry $\mathcal{A}$ odpowiedź na powyższe pytanie jest pozytywna, to wspomniany zbiór wielomianów wyznacza każdą tożsamość wielomianową algebry $\mathcal{A}$. W przypadku algebr nad ciałem o charakterystyce 0, twierdzącą odpowiedź na to pytanie podał Kemer w [24]. Jego dowód opiera się na szczegółowej analizie struktury ideału wolnej algebry, którego elementami są wszystkie tożsamości wielomianowe danej algebry. Natomiast w 1999 roku podano przykłady algebr nad ciałem o charakterystyce dodatniej, dla których odpowiedź na rozważane pytanie jest przecząca (patrz [6], [19] i [42]).

Dla każdej liczby naturalnej n , algebra macierzy $n \times n$ nad ciałem jest algebrą spełniającą tożsamość wielomianową (patrz np. [10, Example 6.15]). Zatem zgodnie z poprzednim akapitem istnieje skończony zbiór wielomianów nieprzemiennych zmiennych, który wyznacza wszystkie tożsamości algebry macierzy $n \times n$ o wyrazach w ciele charakterystyki 0. Taki zbiór znaleziono jedynie dla $n = 2$ (patrz [16], [37]). Więcej informacji o problemie opisanym tożsamości wielomianowych w algebrach macierzy nad ciałem można znaleźć na przykład w [17].

Powyższy fakt pokazuje, jak trudne jest wyznaczenie wszystkich tożsamości wielomianowych konkretnych algebr. Jednym ze znanych wyników pozytywnych jest rezultat Malceva. Pokazał on w artykule [29], że każda tożsamość wielomianowa algebry macierzy górnotrójkątnych $n \times n$ o wyrazach w ciele charakterystyki 0 wynika z tożsamości

$$[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_n, y_n] = 0.$$

Bezpośrednią motywacją do badania maksymalnych podalgebr algebry macierzy nad ciałem, które spełniają tożsamości wielomianowe związane z komutatorami, jest problem opisu maksymalnych przemiennych podalgebr takiej algebry. Wynika to z tego, że algebry przemienne spełniają rozpatrywane przez nas tożsamości wielomianowe.

Maksymalny wymiar przemiennej podalgebry algebry macierzy nad ciałem algebraicznie domkniętym został wyznaczony przez Schura w 1905 roku (patrz [41]). Rezultat ten na dowolne ciało rozszerzył Jacobson w artykule [22] z 1944 roku. Co więcej, w tej pracy autor scharakteryzował z dokładnością do sprzężeń przemienne podalgebry maksymalnego wymiaru algebry macierzy nad ciałami, które są doskonałe (patrz [48, Definition 3.2.5]) lub są charakterystyki różnej od 2.

Wynik Schura był inspiracją do następujących rozważań:

- wyznaczenia maksymalnego wymiaru przemiennej podalgebry algebry zewnętrznej (Grassmanna) (patrz [15]),
- wyznaczenia maksymalnego wymiaru właściwej podalgebry algebry macierzy nad ciałem charakterystyki 0 (patrz [2]),

- wyznaczenia maksymalnego wymiaru podalgebry algebry macierzy nad ciałem spełniającej tożsamość wielomianową

$$[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_q, y_q] = 0 \quad (0.0.1)$$

dla dowolnej liczby naturalnej $q \geq 2$ (patrz [14]),

- wyznaczenia maksymalnego wymiaru podalgebry algebry macierzy nad ciałem spełniającej tożsamość wielomianową

$$\left[\cdots [x_1, x_2], x_3, \dots, x_q \right] = 0$$

dla dowolnej liczby naturalnej $q \geq 3$ (patrz [45]).

Badane były także maksymalne przemienne podalgebry algebry macierzy $n \times n$ nad ciałem, które nie są maksymalnego wymiaru. Początkowo stawiano hipotezę, że najmniejszy wymiar takiej podalgebry jest równy n (patrz [18]). Courter w artykule [12] pokazał, że jest ona nieprawdziwa. Następnie Gustafson w [20] udowodnił, że rozpatrywany wymiar jest zawsze większy niż $n^{\frac{2}{3}}$. Warto wspomnieć, że dla $n = k^3 + 3k$, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną, znana jest konstrukcja maksymalnej przemiennej podalgebry algebry macierzy $n \times n$, której wymiar jest równy części całkowitej liczby $3n^{\frac{2}{3}} - 4$ (patrz [27]). Nowsze wyniki dotyczące tej tematyki otrzymano na przykład w [11] lub [43].

W niniejszej pracy ważne będą blokowo trójkątne podalgebry algebry macierzy. Izomorfizmy w pewnych klasach takich algebr badano w [9] oraz [13]. Pierwsza z tych prac dotyczy izomorfizmów zachowujących gradację blokowo trójkątnych podalgebr algebry macierzy o wyrazach w algebrze z dzieleniem. Natomiast druga praca poświęcona jest problemowi izomorfizmu podpierścieni blokowo trójkątnych pierścienia macierzy o wyrazach w pierścieniu noetherowskim. Innymi artykułami poruszającymi podobne zagadnienia są [3], [4] lub [8].

Głównym celem pracy jest opisanie klas sprzężoności oraz klas algebr izomorficznych wśród maksymalnych podalgebr algebry macierzy nad ciałem, które spełniają tożsamość wielomianową (0.0.1). Ponadto podejmujemy skuteczną próbę znalezienia maksymalnego wymiaru podalgebry algebry macierzy nad ciałem, która spełnia tożsamość

$$\left[[x_1, y_1], z_1 \right] \left[[x_2, y_2], z_2 \right] \cdots \left[[x_q, y_q], z_q \right] = 0 \quad (0.0.2)$$

oraz konstruujemy algebry takiego wymiaru. Przedstawione rezultaty w większości pochodzą z artykułów [30], [31]. Rozszerzają one przywołane wcześniej wyniki Schura oraz Jacobsona.

Pierwsze z zagadnień jest kontynuacją badań prowadzonych w pracach [14], [49], [50]. Prowadzi do odpowiedzi na pytanie postawione w [50] o postać podalgebr z tożsamością wielomianową (0.0.1) algebry macierzy górnotrójkątnych nad ciałem, których wymiar jest maksymalny.

Drugie zagadnienie motywowane jest pracą [46], w której autorzy badali uogólnienia twierdzenia Cayleya–Hamiltona na macierze o wyrazach w pierścieniach spełniających tożsamość (0.0.2). Kolejną motywacją jest pytanie o maksymalny wymiar podalgebry algebry macierzy nad ciałem, która spełnia tożsamość wielomianową

$$[[x_1, y_1], [x_2, y_2]] = 0.$$

Zostało ono w ogólniejszej postaci postawione w [45]. Z analizy wymiaru podalgebr algebry macierzy z tożsamością (0.0.2) dla $q = 2$ otrzymamy ograniczenie na wymiar we wspomnianym wcześniej pytaniu.

Przedstawimy teraz szczegółowo strukturę pracy. Jest ona podzielona na 5 rozdziałów. W pierwszym z nich wprowadzimy pojęcia, które będziemy wykorzystywać w dalszych rozdziałach. Przywołamy twierdzenie Artina–Wedderburna, które pokazuje istotną rolę algebr macierzy w teorii algebr skończonego wymiaru. Podamy także charakteryzację triangularyzowalnych podalgebr algebry macierzy nad ciałem algebraicznie domkniętym. Rozdział zakończymy dowodem kryterium umożliwiającego blokową triangularyzację podalgebr algebry macierzy nad dowolnym ciałem (patrz Stwierdzenie 1.0.20). Wykorzystuje on standardowe metody używane w algebrze liniowej przy badaniu podprzestrzeni niezmienniczych. Przedstawimy go szczegółowo, ponieważ udowodnione kryterium stanowi podstawę dla dowodów zawartych w rozdziale trzecim.

W drugim rozdziale przedstawimy rezultaty Schura oraz Jacobsona dotyczące wymiaru oraz postaci przemiennej podalgebr maksymalnych wymiarów algebry macierzy nad ciałem. Drugi z wyników dotyczy opisu klas sprzężoności przemiennej podalgebr algebr macierzy $n \times n$ (dla $n > 3$) nad ciałem, które jest doskonałe lub jest charakterystyki różnej od 2. Rozszerzymy ten rezultat na przypadek podalgebr algebr macierzy 2×2 i 3×3 nad ciałami algebraicznie domkniętymi (patrz Stwierdzenie 2.1.8). Dla ciał liczb rzeczywistych i zespolonych można go znaleźć na przykład w [26], gdzie jest również przedstawiony szczegółowy rys historyczny dotyczący opisu algebr małego wymiaru.

Dalsza część drugiego rozdziału dotyczy maksymalnych przemiennej podalgebr algebry macierzy nad ciałem. Podamy przykłady takich podalgebr, które nie są przemiennymi podalgebrami maksymalnego wymiaru. Następnie we Wniosku 2.2.5 znajdziemy ograniczenie dolne na wymiar maksymalnych przemiennej podalgebr algebry macierzy, których radykał Jacobsona jest ideałem nilpotentnym indeksu 2 lub jest ideałem zerowym. W dowolnej podalgebrze algebry macierzy nad ciałem radykał Jacobsona jest ideałem nilpotentnym, więc przedstawiony wynik jest początkowym krokiem w badaniach maksymalnych przemiennej podalgebr algebry macierzy. Pokazuje on, że w rozpatrywanym przypadku hipoteza o najmniejszym wymiarze maksymalnej przemiennej podalgebry algebry macierzy nad ciałem, którą przywołaliśmy wcześniej, jest prawdziwa. W przykładach Laffey’a z [27] radykały Jacobsona podalgebr mniejszego wymiaru niż był przypuszczany, są ideałami nilpotentnymi indeksu 3.

W rozdziale trzecim przedstawimy część głównych wyników. Rozpocznemy od definicji blokowo trójkątnych podalgebr algebry macierzy nad ciałem, w których na diagonalnych blokach znajdują się algebry przemienne. Definicja ta została zainspirowana przykładami podalgebr algebry macierzy nad ciałem, opisanymi w pracy [14], które spełniają tożsamość wielomianową (0.0.1) i mają maksymalny wymiar. Z określonymi podalgebrami związany będzie ciąg liczb naturalnych wyznaczający rozmiary bloków. W Twierdzeniu 3.2.5 pokażemy, że każda maksymalna podalgebra algebry macierzy nad ciałem spełniająca tożsamość wielomianową (0.0.1) jest sprzężona z jedną z wcześniej zdefiniowanych podalgebr. Następnie wykażemy, że również implikacja odwrotna jest prawdziwa. Tym samym problem opisu klas sprzężoności maksymalnych podalgebr spełniających tożsamość (0.0.1) sprowadzimy do opisu klas sprzężoności maksymalnych przemiennych podalgebr algebry macierzy nad ciałem.

Dalsza część rozdziału trzeciego dotyczy problemu izomorfizmów, który rozpatrujemy w dwóch klasach blokowo trójkątnych podalgebr algebry macierzy nad ciałem. Ustalenie izomorfizmu algebr należących do pierwszej z klas pozwoli rozwiązać problem izomorfizmów dla podalgebr algebry macierzy spełniających tożsamość wielomianową (0.0.1), które mają maksymalny wymiar. Zrobimy to w Twierdzeniu 3.4.7 przy dodatkowym założeniu, że ciało jest algebraicznie domknięte. Pokażemy, że wtedy izomorficzne podalgebry są sprzężone.

Rozwiązanie problemu izomorfizmu w drugiej z klas podalgebr jest dobrze znane (patrz na przykład [13, Corollary 2.6]). Podany przez nas dowód jest prostą modyfikacją rozważań dotyczących pierwszej z klas podalgebr. Wyniki z rozdziału trzeciego, które opisaliśmy do tej pory poza rezultatem z początku tego akapitu, pochodzą z pracy [31]. Na koniec rozdziału przywołamy wcześniejsze rezultaty wraz z dowodami z pracy [49]. Wyjaśnią one dokładnie strukturę podalgebr algebry macierzy nad ciałem z tożsamością (0.0.1), które mają maksymalny wymiar.

W czwartym rozdziale rozważamy blokowo trójkątną postać maksymalnych podalgebr algebry macierzy nad ciałem z tożsamością (0.0.1), które zawierają się w algebrze macierzy górnotrójkątnych (patrz Twierdzenie 4.1.4). To twierdzenie udowodniliśmy w pracy [31] i odpowiada ono na pytanie [50, Question 9]. Kolejne wyniki z tego rozdziału przygotowujemy do publikacji. Dotyczą one zanurzalności maksymalnych podalgebr algebry macierzy nad ciałem, które spełniają tożsamość wielomianową (0.0.1). W Twierdzeniu 4.2.2 i Wniosku 4.2.3 będziemy ją rozważali nad ciałami algebraicznie domkniętymi. Następnie, ze względu na wcześniejsze wyniki z tego rozdziału, scharakteryzujemy zanurzenia blokowo trójkątnych podalgebr algebry macierzy nad ciałem, które są zgodne z blokową strukturą (patrz Twierdzenie 4.2.13). Uzyskana charakteryzacja jest związana z rozkładalnością diagonalnych bloków. Wtedy podalgebry mogą być zapisane w postaci blokowo trójkątnej na różne sposoby. Rozdział zakończymy, pokazując w Twierdzeniu 4.3.5 jednoznaczność zapisu w postaci blokowo trójkątnej pewnych podalgebr algebry macierzy nad

ciałem z tożsamością wielomianową (0.0.1). Rozszerza ono i uściśla wcześniejszy wynik [50, Theorem 15].

Dodatkową motywacją do rozważań z ostatniego rozdziału są rozwiązalne i nilpotentne algebry Liego. Odgrywają one ważną rolę w teorii algebr Liego. W tym rozdziale przedstawimy wcześniejsze rezultaty pochodzące z prac [32], [45], [49] i [50]. Dotyczą one algebr łącznych, które z nawiasem Liego będącym komutatorem elementów są nilpotentnymi lub rozwiązalnymi algebrami Liego. Następnie udowodnimy nasze główne wyniki. Są nimi Twierdzenie 5.4.1 i Twierdzenie 5.4.6, które pochodzą z artykułu [30]. Twierdzenie 5.4.1 pozwoli wskazać we Wniosku 5.4.8 ograniczenia na wymiar podalgebry algebry macierzy z tożsamością wielomianową $[[x_1, x_2], [y_1, y_2]] = 0$. W Twierdzeniu 5.4.6 podajemy ograniczenie górne na wymiar podalgebry algebry macierzy nad ciałem z tożsamością wielomianową

$$[[x_1, y_1], y_1][[x_2, y_2], z_2] \dots [[x_q, y_q], z_q] = 0,$$

gdzie q jest dowolną liczbą naturalną. Później pokażemy równoważną formułę na uzyskane ograniczenie. To pozwoli nam skonstruować przykład podalgebry algebry macierzy nad ciałem z powyższą tożsamością wielomianową, której wymiar jest największy.

Rozdział 1

Informacje wstępne

W pracy będziemy rozważać pierścienie łączne z jedyneką. Ważną klasą są pierścienie, które dodatkowo mają strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem i mnożenie zgodne z tą strukturą. Ciało będziemy oznaczali przez K .

Definicja 1.0.1. Algebra $\mathcal{A}$ nad ciałem K to przestrzeń liniowa nad K , na której określone jest łączne mnożenie spełniające, dla dowolnych $\alpha, \beta, \gamma \in K$ i $a, b, c \in \mathcal{A}$, równości

$$(\alpha a + \beta b) \cdot c = \alpha(a \cdot c) + \beta(b \cdot c), \quad a \cdot (\beta b + \gamma c) = \beta(a \cdot b) + \gamma(a \cdot c).$$

W powyższej definicji „ $\cdot$ ” oznacza mnożenie elementów algebry $\mathcal{A}$. Nie wprowadziliśmy natomiast oznaczenia dla lewostronnego mnożenia wektorów przez skalary. Dowolny element $\alpha \in K$ w naturalny sposób możemy utożsamić z elementem $\alpha 1 \in \mathcal{A}$. Z równości w Definicji 1.0.1 wynika, że $\alpha 1$ jest przemienny ze wszystkimi elementami $\mathcal{A}$.

Podalgebrą algebry $\mathcal{A}$ nad ciałem K nazywamy każdy podzbiór $P \subseteq \mathcal{A}$, który też jest algebrą nad ciałem K z tą samą jedyneką. Mówimy, że algebra $\mathcal{A}$ jest *skończonego wymiaru*, jeśli wymiar przestrzeni liniowej nad K , którą jest $\mathcal{A}$, jest skończony. Wymiar tej przestrzeni liniowej oznaczamy przez $\dim \mathcal{A}$.

Przykład 1.0.2. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Zbiór macierzy o n wierszach oraz n kolumnach o wyrazach w ciele K jest algebrą nad ciałem K wymiaru n^2 . Będziemy ją oznaczać przez $M_n(K)$. Przykładami podalgebr $M_n(K)$ są:

- algebra macierzy górnotrójkątnych

$$U_n(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in K \text{ dla } 1 \leq i \leq j \leq n \right\},$$

- algebra macierzy górnortrójkątnych z równymi wyrazami na głównej przekątnej

$$U_n^*(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{11} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix} : a_{11} \in K, a_{ij} \in K \text{ dla } 1 \leq i < j \leq n \right\}.$$

Przyjmujemy, że zbiór liczb naturalnych, oznaczany przez $\mathbb{N}$, to $\{1, 2, \dots\}$. Jeśli w naszych dalszych rozważaniach występuje algebra $M_n(K)$ bez dodatkowych założeń o liczbie n oraz ciele K , to dotyczą one algebry macierzy $n \times n$ dla dowolnej liczby naturalnej n o wyrazach pochodzących z dowolnego ciała K .

Nową algebrę można skonstruować na podstawie znanych algebr w następujący sposób.

Przykład 1.0.3. Niech $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_t$, dla pewnej liczby naturalnej t , będą algebrami nad ciałem K . Wtedy zbiór

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_t = \{(a_1, a_2, \dots, a_t) : a_1 \in \mathcal{A}_1, a_2 \in \mathcal{A}_2, \dots, a_t \in \mathcal{A}_t\}$$

ma strukturę przestrzeni liniowej z lewostronnym mnożeniem przez skalary, zadany wzorem

$$\beta(a_1, a_2, \dots, a_t) = (\beta a_1, \beta a_2, \dots, \beta a_t),$$

gdzie $\beta \in K$, $(a_1, a_2, \dots, a_t) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_t$. Ponadto, dla dowolnych wektorów $(v_1, v_2, \dots, v_t), (w_1, w_2, \dots, w_t) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_t$ określamy iloczyn

$$(v_1, v_2, \dots, v_t) \cdot (w_1, w_2, \dots, w_t) = (v_1 \cdot w_1, v_2 \cdot w_2, \dots, v_t \cdot w_t).$$

Przestrzeń liniowa $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_t$ z powyższym mnożeniem jest algebrą nad ciałem K .

Na mocy twierdzenia Cayleya każda grupa skończona jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy symetrycznej. Podobnie każda skończona wymiarowa algebra nad ciałem jest izomorficzna z podalgebrą algebry macierzy pewnego rozmiaru nad tym samym ciałem.

Jeżeli $\mathcal{A}$ jest algebrą nad ciałem K wymiaru n , to izomorfizm algebry $\mathcal{A}$ z pewną podalgebrą $M_n(K)$ uzyskujemy w następujący sposób: Dla dowolnego $a \in \mathcal{A}$, niech $\lambda_a : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ będzie przekształceniem określonym wzorem $\lambda_a(x) = ax$, gdzie $x \in \mathcal{A}$. Jest to przekształcenie liniowe. Znajdując macierze przekształceń takich odwzorowań w ustalonej bazie, otrzymujemy monomorfizm z algebry $\mathcal{A}$ w algebrę $M_n(K)$. Tak określone odwzorowanie nazywamy *reprezentacją regularną*.

Przykład 1.0.4. Ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ jest dwuwymiarową przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ macierzą przekształcenia λ_{a+bi} , które określiliśmy w poprzednim akapicie, w bazie $(1, i)$ jest $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Odwzorowanie przypisujące liczbie zespolonej $a + bi$ macierz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ jest liniowe i różnowartościowe.

Co więcej, dla dowolnych $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -a_1 b_2 - b_1 a_2 \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$, to określone wcześniej odwzorowanie jest homomorfizmem algebr. Tym samym wykazaliśmy, że $\mathbb{C}$ oraz zbiór macierzy $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ są izomorficzne jako algebry nad $\mathbb{R}$.

Uwaga 1.0.5. Zbiór macierzy 2×2 o elementach z ciała $\mathbb{C}$ jest algebrą nad ciałem $\mathbb{R}$ wymiaru 8. Reprezentacja regularna tej algebry prowadzi do jej izomorfizmu z pewną podalgebrą $M_8(\mathbb{R})$. Jednak, korzystając z poprzedniego przykładu, można znaleźć izomorfizm $M_2(\mathbb{C})$ (jako algebry nad $\mathbb{R}$) z pewną podalgebrą $M_4(\mathbb{R})$.

Istotną rolę w teorii algebr nieprzemiennych odgrywają algebry macierzy nad algebraami z dzieleniem. Pojawiają się one w opisie struktury algebr skończonego wymiaru nad ciałem. Występują tam przy charakteryzacji ilorazu algebry przez jej radykał Jacobsona. Przypomnijmy, że *algebra z dzieleniem* to algebra, w której każdy niezerowy element jest odwracalny. Przemienne algebry z dzieleniem są ciałami. Przykładem nieprzemiennej algebry z dzieleniem jest algebra kwaternionów. Konstrukcja innych nieprzemiennych algebr z dzieleniem skończonego wymiaru jest bardziej skomplikowana. Przykład takiej algebry można znaleźć w [28, s. 226].

Definicja 1.0.6. Radykał Jacobsona algebry $\mathcal{A}$, oznaczany przez $J(\mathcal{A})$, to przecięcie wszystkich maksymalnych ideałów lewostronnych algebry $\mathcal{A}$.

Radykał Jacobsona można równoważnie zdefiniować jako przecięcie wszystkich maksymalnych ideałów prawostronnych (patrz [28, (4.2) Corollary]). Stąd wynika, że $J(\mathcal{A})$ jest ideałem. Zgodnie z [28, (4.5) Lemma] mamy:

$$J(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} : \text{dla dowolnych elementów } x, y \in \mathcal{A}, \text{ element } 1 - xay \text{ jest odwracalny}\}.$$

Wykorzystując powyższą charakterystykę radykału Jacobsona, pokażemy, że każdy *nil ideał*, czyli taki ideał, w którym każdy element jest nilpotentny, zawiera się w $J(\mathcal{A})$.

Jeśli a jest dowolnym elementem nil ideału I algebry $\mathcal{A}$, to dla dowolnych $x, y \in \mathcal{A}$ element $z = xay$ należy do I . Istnieje więc liczba naturalna n taka, że $z^n = 0$. Zatem

$$(1 - z)(1 + z + \dots + z^{n-1}) = (1 + z + \dots + z^{n-1})(1 - z) = 1 - z^n = 1.$$

Stąd wynika, że element $1 - xay = 1 - z$ jest odwracalny. Na mocy ostatniej charakterystyki radykału Jacobsona otrzymujemy więc, że $a \in J(\mathcal{A})$. Ponieważ element a jest dowolnym elementem ideału I , to dostajemy zawieranie $I \subseteq J(\mathcal{A})$.

Gdy $\mathcal{A}$ jest algebrą skończonego wymiaru, to na mocy [28, (4.12) Theorem] radykał Jacobsona $J(\mathcal{A})$ jest największym *ideałem nilpotentnym*. Oznacza to, że $J(\mathcal{A})$ jest największym (względem relacji zawierania) ideałem I , dla którego istnieje liczba naturalna

n , taka że $I^n = \{0\}$. Jeśli $I^n = \{0\}$ oraz $I^{n-1} \neq \{0\}$, to liczbę n nazywamy *indeksem nilpotentności* ideału I .

Twierdzenie 1.0.7 (Artin–Wedderburn). *Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem K . Wtedy istnieją liczby naturalne $q, n_1, n_2, \dots, n_q$ i algebry z dzieleniem $D_1, D_2, \dots, D_q$ nad ciałem K takie, że*

$$\mathcal{A}/J(\mathcal{A}) \simeq M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times \dots \times M_{n_q}(D_q).$$

Jeżeli K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to dla każdego $i \in \{1, \dots, q\}$ mamy $D_i = K$.

Do przedstawionej powyżej algebry $\mathcal{B} = M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times \dots \times M_{n_q}(D_q)$ należą elementy

$$E = (I_{n_1}, 0_{n_2}, 0_{n_3}, \dots, 0_{n_q}) \quad \text{oraz} \quad F = (0_{n_1}, I_{n_2}, I_{n_3}, \dots, I_{n_q}),$$

gdzie dla dowolnej liczby naturalnej k przez I_k oznaczamy *macierz jednostkową* rozmiaru $k \times k$, a przez 0_k oznaczamy *macierz zerową* rozmiaru $k \times k$. Określone elementy spełniają równania $E^2 = E$, $F^2 = F$ oraz $EF = FE = 0$. Z elementami E i F związane są podalgebry $E\mathcal{B}E$ i $F\mathcal{B}F$, dane odpowiednio przez:

$$\begin{aligned} E\mathcal{B}E &= \{(x, 0_{n_2}, \dots, 0_{n_q}) : x \in M_{n_1}(D_1)\}, \\ F\mathcal{B}F &= \{(0_{n_1}, x_2, \dots, x_q) : x_i \in M_{n_i}(D_i) \text{ dla } i = 2, 3, \dots, q\}. \end{aligned} \quad (1.0.1)$$

Definicja 1.0.8. Element e algebry $\mathcal{A}$, który spełnia równanie $e^2 = e$, nazywamy *idempotentem*. Jeśli idempotent e jest przemienny ze wszystkimi elementami algebry $\mathcal{A}$, to mówimy, że jest on *idempotentem centralnym*. Gdy f i g są idempotentami takimi, że $fg = gf = 0$, to f i g są *idempotentami ortogonalnymi*.

Z definicji wynika, że 0 i 1 są idempotentami dowolnej algebry. Jeśli e jest idempotentem, to $(1 - e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - e$ oraz $(1 - e)e = e(1 - e) = e - e^2 = 0$. Zatem e i $1 - e$ są idempotentami ortogonalnymi. Przykładami takiej pary idempotentów są określone wcześniej elementy E i F w algebrze $\mathcal{B} = M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times \dots \times M_{n_q}(D_q)$. Dodatkowo, idempotenty E i F są centralne.

Algebry $E\mathcal{B}E$ i $F\mathcal{B}F$ opisane w (1.0.1) dają pewien rozkład algebry $\mathcal{B}$. Podobny rozkład zachodzi, gdy do algebry należy idempotent różny od 0 i 1 . Mówi o tym następujące twierdzenie, którego dowód można znaleźć w [10, 2.7 Idempotents].

Twierdzenie 1.0.9. *Niech e będzie idempotentem algebry $\mathcal{A}$ różnym od 0 i 1 . Wtedy $e\mathcal{A}e$ i $(1 - e)\mathcal{A}(1 - e)$ są algebrami, których jedynekami są odpowiednio e i $(1 - e)$. Algebry te wraz z podprzestrzeniami $e\mathcal{A}(1 - e)$ i $(1 - e)\mathcal{A}e$ algebry $\mathcal{A}$ dają następujący rozkład $\mathcal{A}$ na sumę prostą podprzestrzeni liniowych*

$$\mathcal{A} = e\mathcal{A}e \oplus e\mathcal{A}(1 - e) \oplus (1 - e)\mathcal{A}e \oplus (1 - e)\mathcal{A}(1 - e). \quad (1.0.2)$$

Jeśli e jest idempotentem centralnym, to algebry $e\mathcal{A}e$ i $(1-e)\mathcal{A}(1-e)$ są ideałami algebry $\mathcal{A}$. Wtedy rozkład algebry $\mathcal{A}$ na sumę prostą podprzestrzeni liniowych z (1.0.2) upraszcza się do postaci $\mathcal{A} = e\mathcal{A}e \oplus (1-e)\mathcal{A}(1-e)$.

Rozkład ze wzoru (1.0.2) został wprowadzony przez Peirce'a w pracy [33]. Teza ostatniego twierdzenia dotycząca idempotentu centralnego motywuje następującą definicję.

Definicja 1.0.10. Powiemy, że algebra $\mathcal{A}$ rozkłada się na sumę prostą algebr, jeśli istnieją niezerowe algebry $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ będące jednocześnie ideałami algebry $\mathcal{A}$ takie, że $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ jako przestrzeń liniowa.

W powyższej definicji wystarczy jedynie zakładać, że $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ są ideałami algebry $\mathcal{A}$ takimi, że $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ jako przestrzeń liniowa. Dodaliśmy założenie, że $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ są algebrami, aby definicja była zgodna z treścią Twierdzenia 1.0.9.

Uwaga 1.0.11. Z Twierdzenia 1.0.9 wynika, że algebra, do której należy idempotent centralny różny od 0 i 1, rozkłada się na sumę prostą algebr. Pokażemy, że przeciwna implikacja jest także prawdziwa. W tym celu sprawdzimy, że w algebrze, która rozkłada się na sumę prostą algebr $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, jedynka algebry $\mathcal{A}_1$ jest idempotentem centralnym. Niech e będzie jedynką $\mathcal{A}_1$, natomiast niech a będzie dowolnym elementem $\mathcal{A}$. Ponieważ jako przestrzeń liniowa $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, to istnieją $a_1 \in \mathcal{A}_1$ i $a_2 \in \mathcal{A}_2$ takie, że $a_1 + a_2 = a$. Zatem

$$ae = (a_1 + a_2)e = a_1e + a_2e.$$

Z założenia, że $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ są ideałami algebry $\mathcal{A}$ wynika, że $a_2e \in \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_1 = \{0\}$. Stąd $ae = a_1e = a_1$. Podobnie sprawdzamy równość

$$ea = ea_1 + ea_2 = ea_1 = a_1.$$

To pokazuje, że e jest idempotentem centralnym.

Stąd również $(1-e)$ jest idempotentem centralnym. Ponadto dla dowolnego elementu $y \in \mathcal{A}_2$ mamy równość $(1-e)y = y - ey = y$, ponieważ $ey \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{0\}$. Podobnie pokazujemy, że $y(1-e) = y$, więc $1-e$ jest jedynką algebry $\mathcal{A}_2$.

W Lemacie 2.1.4 opiszemy podalgebry $M_n(K)$, które rozkładają się na sumę prostą algebr. Teraz podamy przykład podalgebry $M_n(K)$, która jako przestrzeń liniowa jest sumą prostą podprzestrzeni liniowych będących jednocześnie algebrami, ale nie ideałami. Zobaczymy, że wtedy własności opisane w Uwadze 1.0.11 nie są spełnione.

Przykład 1.0.12. Rozważmy następujące podprzestrzenie liniowe w $U_3(K)$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c \in K \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} : d, e, f \in K \right\}.$$

Wtedy $U_3(K)$ jest sumą prostą podprzestrzeni V i W , które są jednocześnie algebrami. Jednak V nie jest ideałem algebry $U_3(K)$, gdyż

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in V, \quad \text{ale} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \notin V.$$

Podobnie W nie jest ideałem algebry $U_3(K)$, ponieważ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in W, \quad \text{ale} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W.$$

W przedstawionym przykładzie element neutralny algebry W nie jest centralnym idempotentem. Istotnie, na przykład iloczyny

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nie są równe. Co więcej, suma jedynek algebr V oraz W nie jest jedynką algebry $U_3(K)$.

Istotnym faktem jest to, że idempotenty algebry $\mathcal{A}$ i algebry ilorazowej $\mathcal{A}/I$, gdzie I jest nil ideałem, są ze sobą powiązane. Związek ten opisuje kolejne twierdzenie, którego dowód znajduje się m.in. w [28, (21.28) Theorem].

Twierdzenie 1.0.13. *Niech I będzie nil ideałem algebry $\mathcal{A}$, natomiast e niech będzie idempotentem algebry ilorazowej $\mathcal{A}/I$. Wtedy istnieje idempotent $f \in \mathcal{A}$ taki, że $\bar{f} = e$, gdzie $\bar{f}$ oznacza obraz f przy naturalnym homomorfizmie $\mathcal{A}$ na algebrę ilorazową $\mathcal{A}/I$.*

W każdej algebrze skończonego wymiaru radykał Jacobsona jest największym ideałem nilpotentnym. Zatem poprzednie twierdzenie możemy zastosować do algebry skończonego wymiarowej $\mathcal{A}$ i algebry ilorazowej $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$, która na mocy Twierdzenia 1.0.7 jest izomorficzna z pewnym produktem algebr macierzy nad algebrami z dzieleniem.

Przykład 1.0.14. Opiszemy idempotenty w algebrze $M_n(K)$ nad ciałem K . Pokażemy, że dowolny idempotent F algebry $M_n(K)$ jest sprzężony z jedną z poniższych macierzy

$$0_n, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_n. \quad (1.0.3)$$

Znajdziemy więc macierz odwracalną $X \in M_n(K)$ taką, że $X^{-1}FX$ jest jedną z macierzy w (1.0.3). Przypomnijmy, że różne macierze sprzężone są macierzami tego samego przekształcenia liniowego zapisanego w różnych bazach.

Niech $f: K^n \rightarrow K^n$ będzie przekształceniem liniowym, którego macierzą przekształcenia w bazie standardowej jest F . Ponieważ $F^2 = F$, to $f \circ f = f$. Zatem dowolny wektor $v \in K^n$ możemy zapisać jako $v = f(v) + v - f(v)$, gdzie $f(v)$ należy do obrazu przekształcenia f , a $v - f(v)$ należy do jądra przekształcenia f . Stąd i z równości $\text{im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$ wynika, że K^n jest sumą prostą podprzestrzeni $\text{im}(f)$ oraz $\ker(f)$. Możemy więc znaleźć bazę $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ przestrzeni K^n taką, że dla pewnej liczby naturalnej ℓ wektory $v_1, v_2, \dots, v_\ell$ są wektorami bazowymi $\text{im}(f)$, a $v_{\ell+1}, v_{\ell+2}, \dots, v_n$ są wektorami bazowymi $\ker(f)$. Dla dowolnego v_j , który jest wektorem bazowym $\text{im}(f)$, istnieje wektor w_j taki, że $v_j = f(w_j)$. Zatem $f(v_j) = f(f(w_j)) = f(w_j) = v_j$. Stąd oraz z tego, że obrazy wektorów bazy B nienależących do $\text{im}(f)$ są zerowe, wynika, że macierz przekształcenia liniowego f w bazie B jest równa tej macierzy z (1.0.3), która ma dokładnie ℓ jedynek.

Definicja 1.0.15. Niech i, j, n będą liczbami naturalnymi spełniającymi nierówności $1 \leq i, j \leq n$. Macierz $n \times n$, której jedynym niezerowym wyrazem jest 1 w i -tym wierszu oraz j -tej kolumnie, nazywamy jedyneką macierzową algebry $M_n(K)$. Będziemy ją oznaczać przez e_{ij} .

Dla dowolnych liczb naturalnych $i, j, k, \ell \in \{1, 2, \dots, n\}$ iloczyn jedynek macierzowych e_{ij} oraz $e_{k\ell}$ algebry $M_n(K)$ jest następujący

$$e_{ij} \cdot e_{k\ell} = \begin{cases} e_{i\ell}, & \text{jeśli } j = k, \\ 0_n & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Stosując wprowadzone oznaczenie, idempotenty z (1.0.3), inne niż 0_n i I_n , można zapisać jako sumy jedynek macierzowych:

$$e_{11}, \quad e_{11} + e_{22}, \quad \dots, \quad e_{11} + e_{22} + \dots + e_{n-1, n-1}.$$

Podobnie jak określamy macierze sprzężone, podalgebry $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ algebry $M_n(K)$ nazywamy *sprzężonymi*, jeśli istnieje macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ taka, że

$$\mathcal{B} = X^{-1}\mathcal{A}X := \{X^{-1}aX : a \in \mathcal{A}\}.$$

Sprzężone podalgebry $M_n(K)$ są macierzami tych samych endomorfizmów liniowych przestrzeni K^n zapisanymi w pewnych dwóch bazach.

Jeżeli $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ sprzężoną z podalgebrą zawartą w $U_n(K)$, to podalgebrę $\mathcal{A}$ nazywamy *triangularyzowalną*. Dla ciała algebraicznie domkniętego K , jeden z opisów triangularyzowalnych podalgebr $M_n(K)$ podaje [36, Theorem 1.3.2].

Twierdzenie 1.0.16. Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech $\mathcal{A}$ będzie podalgebrą $M_n(K)$. Podalgebra $\mathcal{A}$ jest triangularyzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x, y \in \mathcal{A}$ element $xy - yx$ jest nilpotentny.

Definicja 1.0.17. W dowolnej algebrze $\mathcal{A}$ element $xy - yx$ nazywamy komutatorem elementów x oraz y i oznaczamy przez $[x, y]$. Ideał algebry $\mathcal{A}$ generowany przez zbiór wszystkich komutatorów oznaczamy przez $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$.

Niech $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$ będą dowolnymi macierzami $U_2(K)$. Komutator macierzy A oraz B jest równy

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1, b_1] & a_1 b_2 + a_2 b_3 - b_1 a_2 - b_2 a_3 \\ 0 & [a_3, b_3] \end{pmatrix}.$$

Mnożenie w ciele jest przemienne, więc $[a_1, a_2] = [b_1, b_2] = 0$. Zatem $[A, B] \in \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Podobnie komutator dowolnych dwóch macierzy $U_n(K)$ dla $n > 2$ należy do zbioru

$$\begin{pmatrix} 0 & K & K & \dots & K \\ 0 & 0 & K & \dots & K \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & K \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.0.4)$$

Jeśli $\mathcal{A}$ jest przemianą algebrą, to komutator dowolnych elementów jest zerowy. Zatem wartość wielomianu $xy - yx$ o nieprzemiennej zmiennych x i y , jest równa 0 po podstawieniu za x i za y dowolnych elementów algebry $\mathcal{A}$. To pokazuje, że dowolna przemiana algebra jest algebrą z tożsamością wielomianową, którą określamy następująco.

Definicja 1.0.18. Niech f będzie wielomianem n nieprzemiennej zmiennych o współczynnikach z ciała K . Powiemy, że algebra $\mathcal{A}$ nad ciałem K jest algebrą z tożsamością wielomianową $f = 0$, jeśli $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ dla dowolnych $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{A}$.

Wcześniej pokazaliśmy, że komutator dowolnych dwóch macierzy $U_n(K)$ należy do zbioru przedstawionego w (1.0.4). Iloczyn dowolnych n macierzy ze wspomnianego zbioru jest zerowy. Stąd wynika, że $U_n(K)$ jest algebrą z tożsamością wielomianową

$$[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_n, y_n] = 0.$$

Innym przykładem algebry z tożsamością wielomianową jest algebra zewnętrzna, nazywana też algebrą Grassmanna.

Definicja 1.0.19. Niech n będzie liczbą naturalną większą lub równą 2 oraz niech K będzie ciałem charakterystyki różnej od 2. Algebrą zewnętrzną o n generatorach nad ciałem K nazywamy algebrą ilorazową algebry wielomianów o nieprzemiennej zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ i współczynnikach w ciele K , podzieloną przez ideał generowany przez zbiór $R = \{x_i x_j + x_j x_i : i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$.

Podstawowe własności algebry zewnętrznej opisane są na przykład w [10, Example 6.7]. Natomiast w [10, Example 6.16] wyjaśnione jest, że algebra zewnętrzna spełnia tożsamość wielomianową $[[x_1, x_2], x_3] = 0$. Co więcej, wszystkie tożsamości wielomianowe algebry zewnętrznej o nieskończenie wielu generatorach wynikają z równości $[[x_1, x_2], x_3] = 0$ (patrz [17, Theorem 1.4.4]).

Szerszą klasą podalgebr $M_n(K)$ niż podalgebry triangularyzowalne są podalgebry sprzężone z podalgebrami macierzy blokowo górnotrójkątnych. Pokażemy, że do tej klasy należą podalgebry $M_n(K)$ zawierające niezerowy ideał nilpotentny.

Jeśli I jest niezerowym ideałem nilpotentnym podalgebry $\mathcal{A}$ algebry $M_n(K)$, którego indeks nilpotentności jest równy q , to dla dowolnego $t \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ rozważamy podprzestrzeń przestrzeni $V = K^n$ daną wzorem

$$I^t V = \left\{ \begin{pmatrix} i_{11} & \dots & i_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i_{n1} & \dots & i_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} i_{11} & \dots & i_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i_{n1} & \dots & i_{nn} \end{pmatrix} \in I^t, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V \right\}.$$

Ponieważ I jest ideałem, to również I^{q-2} jest ideałem, więc $I^{q-1}V = II^{q-2}V \subseteq I^{q-2}V$. Podobnie uzasadnimy zawieranie $I^{q-2}V \subseteq I^{q-3}V$. Kontynuując, otrzymujemy ciąg zawierania

$$0 \subseteq I^{q-1}V \subseteq I^{q-2}V \subseteq \dots \subseteq IV \subseteq V. \quad (1.0.5)$$

Użyjemy ciągu (1.0.5) w dowodzie następującego stwierdzenia.

Stwierdzenie 1.0.20 ([36], Theorem 1.5.1). *Niech $\mathcal{A}$ będzie podalgebrą $M_n(K)$ oraz niech I będzie niezerowym ideałem nilpotentnym algebry $\mathcal{A}$, którego indeks nilpotentności jest równy q . Wtedy $q \leq n$, istnieją liczby naturalne $n_1, n_2, \dots, n_q$ takie, że $\sum_{i=1}^q n_i = n$ oraz istnieje macierz odwracalna $X \in M_n(K)$, dla której algebra $X^{-1}\mathcal{A}X$ zawiera się w zbiorze*

$$\begin{pmatrix} M_{n_1}(K) & M_{n_1 \times n_2}(K) & M_{n_1 \times n_3}(K) & \dots & M_{n_1 \times n_q}(K) \\ 0_{n_2 \times n_1} & M_{n_2}(K) & M_{n_2 \times n_3}(K) & \dots & M_{n_2 \times n_q}(K) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & M_{n_{q-1} \times n_q}(K) \\ 0_{n_q \times n_1} & \dots & \dots & 0_{n_q \times n_{q-1}} & M_{n_q}(K) \end{pmatrix}. \quad (1.0.6)$$

Co więcej, $X^{-1}IX$ zawiera się w zbiorze macierzy blokowo trójkątnych należących do (1.0.6), których diagonalne bloki są zerowe.

Dowód. Niech $V = K^n$ oraz niech $IV, I^2V, \dots, I^{q-1}V$ będą podprzestrzeniami liniowymi V występującymi w ciągu (1.0.5). Najpierw pokażemy, że liczby

$$n_i = \dim I^{q-i}V / \dim I^{q-i+1}V,$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, q$ (przyjmujemy $I^0 = \mathcal{A}$), spełniają równość $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$. Później sprawdzimy, że $q \leq n$. Na koniec znajdziemy macierz odwracalną $X \in M_n(K)$ taką, że $X^{-1}\mathcal{A}X$ oraz $X^{-1}IX$ zawierają się w odpowiednich blokowo trójkątnych podzbiorach $M_n(K)$, które są związane z liczbami $n_1, n_2, \dots, n_q$.

Z założenia $I^q = \{0_n\}$, więc $n_1 = \dim I^{q-1}V/I^qV = \dim I^{q-1}V$. Ponieważ $I^{q-1}V$ jest podprzestrzenią liniową $I^{q-2}V$, to

$$n_1 + n_2 = \dim I^{q-1}V + \dim I^{q-2}V/I^{q-1}V = \dim I^{q-2}V.$$

Podobnie $I^{q-2}V$ jest podprzestrzenią liniową $I^{q-3}V$, więc

$$n_1 + n_2 + n_3 = \dim I^{q-2}V + \dim I^{q-3}V/I^{q-2}V = \dim I^{q-3}V.$$

W ten sposób pokazujemy, że dla dowolnej liczby $i \in \{1, 2, \dots, q\}$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_i = \dim I^{q-i}V.$$

W szczególności $n_1 + n_2 + \dots + n_q = \dim \mathcal{A}V = \dim V = n$.

Sprawdźmy teraz, że $q \leq n$. W tym celu wykażemy, że wszystkie zawierania w ciągu podprzestrzeni (1.0.5) są właściwe. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas $I^{q-1}V = \{0_n\}$, lub istnieje liczba $j \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ taka, że $I^{q-j}V = I^{q-j-1}V$. W drugim z przypadków tak samo jak w pierwszym mamy

$$I^{q-1}V = I^j(I^{q-j-1}V) = I^j(I^{q-j}V) = I^qV = \{0_n\}. \quad (1.0.7)$$

Jednak $V = K^n$ oraz $I^{q-1} \neq \{0_n\}$, ponieważ q jest indeksem nilpotentności ideału I . Stąd wynika, że $I^{q-1}V \neq \{0_n\}$, co przeczy równości (1.0.7). Udowodniliśmy, że w ciągu podprzestrzeni (1.0.5) zawierania są właściwe. Zatem otrzymujemy nierówności

$$1 \leq \dim I^{q-1}V, \quad 2 \leq \dim I^{q-2}V, \quad \dots, \quad q-1 \leq \dim IV, \quad q \leq \dim \mathcal{A}V = \dim V = n.$$

Pokazaliśmy, że $q \leq n$.

Posługując się ciągiem podprzestrzeni (1.0.5), określimy istotną dla dalszych rozważań bazę B przestrzeni V . Aby zakończyć dowód, sprawdzimy, że za macierz X , która spełnia tezę dowodzonego lematu, możemy przyjąć macierz przejścia z bazy B do bazy standardowej przestrzeni V .

Wymiar przestrzeni $I^{q-1}V$ jest równy n_1 . Niech zatem układ $(v_1, v_2, \dots, v_{n_1})$, dla pewnych wektorów $v_1, v_2, \dots, v_{n_1} \in V$, będzie bazą $I^{q-1}V$. Ponieważ $I^{q-1}V$ jest podprzestrzenią $I^{q-2}V$ oraz $\dim I^{q-2}V = n_1 + n_2$, to istnieją wektory $v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, \dots, v_{n_1+n_2}$, dla których układ $(v_1, v_2, \dots, v_{n_1+n_2})$ jest bazą $I^{q-2}V$. Kontynuując opisaną procedurę, znajdujemy bazę $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ przestrzeni V taką, że dla każdej liczby naturalnej $i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ układ $(v_1, v_2, \dots, v_{n_1+n_2+\dots+n_i})$ jest bazą $I^{q-i}V$.

Weźmy dowolną macierz Y , która należy do podalgebry $\mathcal{A}$. Niech $\varphi: V \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym, którego macierzą przekształcenia w bazach standardowych przestrzeni V jest Y . Ponieważ I jest ideałem, to $Y(I^{q-1}V) \subseteq \mathcal{A}(I^{q-1}V) \subseteq I^{q-1}V$. Układ $(v_1, v_2, \dots, v_{n_1})$ jest bazą $I^{q-1}V$, więc dla każdej liczby $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ istnieją współczynniki $y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{n_1,i} \in K$ takie, że

$$\varphi(v_i) = Yv_i = y_{1i}v_1 + y_{2i}v_2 + \dots + y_{n_1,i}v_{n_1}. \quad (1.0.8)$$

Podobnie $Y(I^{q-2}V) \subseteq I^{q-2}V$ oraz układ $(v_1, v_2, \dots, v_{n_1+n_2})$ jest bazą $I^{q-2}V$. Zatem dla każdego $j \in \{n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2\}$ istnieją współczynniki $y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{n_1+n_2,j} \in K$ takie, że

$$\varphi(v_j) = Yv_j = y_{1j}v_1 + y_{2j}v_2 + \dots + y_{n_1+n_2,j}v_{n_1+n_2}. \quad (1.0.9)$$

Postępując analogicznie z kolejnymi wektorami bazy B , znajdujemy współczynniki

$$y_{1,n_1+n_2+1}, y_{2,n_1+n_2+1}, \dots, y_{n_1+n_2+n_3,n_1+n_2+1}, y_{1,n_1+n_2+2}, \dots, y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{nn} \in K,$$

które spełniają równości analogiczne do (1.0.8) oraz (1.0.9). Stąd macierz $M(\varphi)_B^B$ (macierz przekształcenia φ w bazie B) jest równa

$$\begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1,n_1} & y_{1,n_1+1} & \dots & y_{1,N_2} & \dots & y_{1,N_{q-1}+1} & \dots & y_{1,N_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n_1,1} & \dots & y_{n_1,n_1} & y_{n_1,n_1+1} & \dots & y_{n_1,N_2} & \dots & y_{n_1,N_{q-1}+1} & \dots & y_{n_1,N_q} \\ & & & y_{n_1+1,n_1+1} & \dots & y_{n_1+1,N_2} & \dots & y_{n_1+1,N_{q-1}+1} & \dots & y_{n_1+1,N_q} \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & y_{N_2,n_1+1} & \dots & y_{N_2,N_2} & \dots & y_{N_2,N_{q-1}+1} & \dots & y_{N_2,N_q} \\ & & & & & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & y_{N_{q-1}+1,N_{q-1}+1} & \dots & y_{N_{q-1}+1,N_q} \\ & & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & y_{N_q,N_{q-1}+1} & \dots & y_{N_q,N_q} \end{pmatrix},$$

gdzie $N_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i$ dla $i \in \{2, 3, \dots, q\}$ oraz niezapisane wyrazy macierzy są zerami. Macierz $M_B^B(\varphi)$ należy do zbioru (1.0.6). Ze wzoru na zamianę bazy

$$M_B^B(\varphi) = M_E^B(id) \cdot M_E^E(\varphi) \cdot M_B^E(id) = M_E^B(id) \cdot Y \cdot M_B^E(id),$$

gdzie E jest bazą standardową przestrzeni V . Z tego, że Y jest dowolną macierzą $\mathcal{A}$ oraz z ostatniej równości wynika, że $(M_B^E(id))^{-1} \cdot \mathcal{A} \cdot M_B^E(id)$ zawiera się w zbiorze (1.0.6).

Pozostało sprawdzić, że sprzężenie macierzą przejścia $M_B^E(id)$ każdego elementu ideału I jest macierzą blokową z zerowymi blokami na przekątnej. Aby to zrobić, postąpimy analogicznie jak w poprzednim akapicie. Weźmy dowolną macierz Z należącą do ideału I . Niech $\psi: V \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $M_E^E(\psi) = Z$. Ponieważ $I^q = \{0_n\}$, to $Z(I^{q-1}V) \subseteq I(I^{q-1}V) = \{0_n\}$. Zatem dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ spełniona jest równość $\psi(v_i) = Zv_i = 0$. Następnie z zawierania $Z(I^{q-2}V) \subseteq I(I^{q-2}V) = I^{q-1}V$ dla każdej liczby $j \in \{n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2\}$ istnieją współczynniki $z_{1j}, z_{2j}, \dots, z_{n_1,j} \in K$ takie, że

$$\psi(v_j) = Zv_j = z_{1j}v_1 + z_{2j}v_2 + \dots + z_{n_1,j}v_{n_1}. \quad (1.0.10)$$

Podobnie znajdujemy współczynniki

$$z_{1,n_1+n_2+1}, z_{2,n_1+n_2+1}, \dots, z_{n_1+n_2,n_1+n_2+1}, z_{1,n_1+n_2+2}, \dots, z_{1n}, z_{2n}, \dots, z_{n_1+n_2+\dots+n_{q-1},n} \in K,$$

które spełniają równość analogiczną do (1.0.10). Stąd wynika, że macierz $M_B^B(\psi)$ jest równa

[illegible]

gdzie jak wcześniej $N_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i$ dla $i \in \{2, 3, \dots, q\}$ i niezaznaczone wyrazy poniżej diagonalnych bloków są zerowe. Ponieważ

$$M_B^B(\psi) = M_E^B(id) \cdot M_E^E(\psi) \cdot M_B^E(id) = (M_B^E(id))^{-1} \cdot Z \cdot M_B^E(id),$$

to otrzymujemy, że sprzężenie Z macierzą $M_E^B(id)$ ma zerowe diagonalne bloki. Dowód został zakończony. $\square$

Rozdział 2

Przemienne podalgebry algebry macierzy

W tym rozdziale przedstawimy podstawowe wyniki dotyczące przemiennych podalgebr $M_n(K)$. Zaczniemy od podania rezultatów Schura i Jacobsona dotyczących przemiennych podalgebr $M_n(K)$ maksymalnych wymiarów. Uzupełnimy twierdzenie udowodnione przez Jacobsona o pominięte wcześniej rozważania na temat podalgebr $M_2(K)$ oraz $M_3(K)$ przy założeniu, że ciało K jest algebraicznie domknięte. Następnie podamy przykłady maksymalnych przemiennych podalgebr $M_n(K)$, które nie mają maksymalnego wymiaru oraz wyznaczymy najmniejszy wymiar maksymalnej przemiennej podalgebry $\mathcal{A}$ algebry $M_n(K)$, dla której $J(\mathcal{A})^2 = \{0_n\}$.

Przez przemienne podalgebry $M_n(K)$ maksymalnych wymiarów rozumiemy te algebry, które spośród wszystkich przemiennych podalgebr $M_n(K)$ mają największy wymiar. Natomiast przez maksymalne przemienne podalgebry $M_n(K)$ rozumiemy algebry, które wśród wszystkich przemiennych podalgebr $M_n(K)$ są maksymalne względem relacji zawierania. Analogiczne określenia będziemy stosować w kolejnych rozdziałach do innych klas podalgebr $M_n(K)$.

2.1 Przemienne podalgebry algebry $M_n(K)$ maksymalnych wymiarów

Klasyczny wynik dotyczący wymiaru przemiennych podalgebr algebry macierzy $M_n(K)$ jest następujący.

Twierdzenie 2.1.1. *Dla dowolnego ciała K i dowolnej liczby naturalnej n maksymalny wymiar przemiennej podalgebry algebry $M_n(K)$ jest równy $1 + \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$, gdzie $\lfloor \cdot \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej.*

Powyższe twierdzenie nazywane jest twierdzeniem Schura, który udowodnił je w [41]

przy dodatkowym założeniu, że ciało K jest algebraicznie domknięte. W artykule [22] Jacobson uogólnił wynik Schura na dowolne ciało.

Przykład 2.1.2. Podalgebrami przemiennymi algebry $M_n(K)$ wymiaru $1 + \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ są:

$$C_1^1(K) = K, \quad (2.1.1)$$

gdy $n = 1$,

$$C_n^1(K) = KI_n + \left(\begin{array}{c|c} 0_\ell & M_\ell(K) \\ \hline 0_\ell & 0_\ell \end{array} \right), \quad (2.1.2)$$

gdy liczba n jest parzysta, równa 2ℓ dla pewnej liczby naturalnej ℓ ,

$$C_n^1(K) = KI_n + \left(\begin{array}{c|c} 0_\ell & M_{\ell \times (\ell+1)}(K) \\ \hline 0_{(\ell+1) \times \ell} & 0_{\ell+1} \end{array} \right) \quad (2.1.3)$$

lub

$$C_n^2(K) = KI_n + \left(\begin{array}{c|c} 0_{\ell+1} & M_{(\ell+1) \times \ell}(K) \\ \hline 0_{\ell \times (\ell+1)} & 0_\ell \end{array} \right), \quad (2.1.4)$$

gdy liczba $n \geq 3$ jest nieparzysta, równa $2\ell + 1$ dla pewnej liczby naturalnej ℓ .

Dla przykładu algebry $C_2^1(K)$, $C_3^1(K)$ oraz $C_3^2(K)$ są równe odpowiednio

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in K \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c \in K \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c \in K \right\}.$$

W algebrach określonych wzorami (2.1.2) – (2.1.4) iloczyn dwóch dowolnych macierzy, które mają zerowe wyrazy na głównej przekątnej, są równe 0_n . Zatem algebry te są przemienne. Z tego samego powodu dowolny izomorfizm liniowy, który działa tożsamościowo na macierzach skalarnych, ustala izomorfizm algebr $C_n^1(K)$ i $C_n^2(K)$ dla dowolnej liczby nieparzystej n większej lub równej 3.

Poniżej przedstawimy twierdzenie Jacobsona, w sformułowaniu którego występują podalgebry z Przykładu 2.1.2. Definicję ciała doskonałego, pojawiającego się w tym twierdzeniu, możemy znaleźć na przykład w [48, Definition 3.2.5]. Wynika z niej, że każde ciało algebraicznie domknięte jest doskonałe.

Twierdzenie 2.1.3 ([22], Theorem 3). *Niech $\mathcal{A}$ będzie przemenną podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru, gdzie K jest ciałem doskonałym lub K jest ciałem charakterystyki różnej od 2, a $n > 3$. Wtedy jeśli liczba n jest parzysta, to $\mathcal{A}$ jest sprzężona z podalgebrą $C_n^1(K)$, a jeśli liczba n jest nieparzysta, to $\mathcal{A}$ jest sprzężona z $C_n^1(K)$ lub $C_n^2(K)$.*

Co więcej, Jacobson pokazał, że dla dowolnej liczby nieparzystej n różnej od 1 i 3 podalgebry $C_n^1(K)$ i $C_n^2(K)$ nie są sprzężone. Przedstawiony przez niego argument jest także prawdziwy dla $n = 3$. We Wniosku 4.1.2 podamy inne uzasadnienie tego rezultatu.

Tezy Twierdzenia 2.1.3 nie można rozszerzyć na przypadek, gdy $n = 2$ lub $n = 3$. Jest to związane z tym, że jedynie dla takich liczb n istnieją przemienne podalgebry $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru, które rozkładają się na sumę prostą algebr (patrz Definicja 1.0.10).

Lemat 2.1.4. Niech $\mathcal{A}$ będzie podalgebrą algebry $M_n(K)$, która rozkłada się na sumę prostą algebr $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$. Wtedy $\mathcal{A}$ jest sprzężona z algebrą w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_1 & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & \mathcal{A}'_2 \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{A}'_1$ i $\mathcal{A}'_2$ są podalgebrami odpowiednio $M_{n_1}(K)$ i $M_{n_2}(K)$, natomiast n_1 i n_2 są liczbami naturalnymi takimi, że $n_1 + n_2 = n$. Co więcej, algebry $\mathcal{A}_i$ oraz $\mathcal{A}'_i$ są izomorficzne dla $i = 1, 2$.

Dowód. Jeśli algebra $\mathcal{A}$ rozkłada się na sumę prostą algebr $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, to z Uwagi 1.0.11 jedynek algebr $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ są idempotentami centralnymi. Co więcej, jeśli e jest jedynką algebry $\mathcal{A}_1$, to $(I_n - e)$ jest jedynką algebry $\mathcal{A}_2$.

W Przykładzie 1.0.14 pokazaliśmy, że idempotent e jest sprzężony z macierzą

$$\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times (n-n_1)} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & 0_{n-n_1} \end{pmatrix},$$

gdzie n_1 jest pewną liczbą naturalną. Istnieje więc macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ taka, że

$$X^{-1}eX = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times (n-n_1)} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & 0_{n-n_1} \end{pmatrix}.$$

Oznaczmy $n - n_1$ przez n_2 . Ponieważ e jest jedynką algebry $\mathcal{A}_1$, to dla dowolnego $a_1 \in \mathcal{A}_1$

$$\begin{aligned} X^{-1}a_1X &= X^{-1}ea_1eX = (X^{-1}eX)(X^{-1}a_1X)(X^{-1}eX) \\ &= \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix} X^{-1}a_1X \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} M_{n_1}(K) & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podobnie dla dowolnego $a_2 \in \mathcal{A}_2$

$$X^{-1}a_2X \subseteq \begin{pmatrix} 0_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & M_{n_2}(K) \end{pmatrix}.$$

Zatem z rozkładu algebry $\mathcal{A}$ na sumę prostą algebr $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ wynika, że

$$X^{-1}\mathcal{A}X = \begin{pmatrix} \mathcal{A}'_1 & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & \mathcal{A}'_2 \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{A}'_1$ jest podalgebrą $M_{n_1}(K)$ utworzoną z macierzy $n_1 \times n_1$, których wyrazy znajdują się w pierwszych n_1 wierszach i n_1 kolumnach macierzy należących do algebry $X^{-1}\mathcal{A}_1X$, natomiast $\mathcal{A}'_2$ jest podalgebrą $M_{n_2}(K)$ zdefiniowaną w podobny sposób. Z określenia algebry $\mathcal{A}'_1$ wynika, że jest ona izomorficzna z algebrą $X^{-1}\mathcal{A}_1X$. Stąd dostajemy izomorfizm algebr $\mathcal{A}'_1$ i $\mathcal{A}_1$. Podobnie uzasadniamy, że algebry $\mathcal{A}'_2$ i $\mathcal{A}_2$ są izomorficzne. To kończy dowód. $\square$

Stwierdzenie 2.1.5. Niech $\mathcal{A}$ będzie przemienną podalgebrą algebry $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru, która rozkłada się na sumę prostą algebr. Wtedy $n \in \{2, 3\}$.

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{A}$ jest przemienną podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru, która rozkłada się na sumę prostą algebr. Wtedy z Lematu 2.1.4 wynika, że podalgebra $\mathcal{A}$ jest sprzężona z podalgebrą $\mathcal{A}'$ w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_1 & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_1 \times n_2} & \mathcal{A}'_2 \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{A}'_1$ i $\mathcal{A}'_2$ są podalgebrami odpowiednio $M_{n_1}(K)$ i $M_{n_2}(K)$, a n_1 i n_2 są liczbami naturalnymi takimi, że $n_1 + n_2 = n$. Ponieważ $\mathcal{A}$ jest przemienną podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru, to jej sprzężenie $\mathcal{A}'$ też ma te własności. Zatem również $\mathcal{A}'_1$ i $\mathcal{A}'_2$ są przemiennymi podalgebrami odpowiednio $M_{n_1}(K)$ i $M_{n_2}(K)$ maksymalnych wymiarów. Z Twierdzenia Schura (Twierdzenie 2.1.1) wynika, że

$$\begin{aligned} 1 + \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor &= \dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}' = \dim \mathcal{A}'_1 + \dim \mathcal{A}'_2 = 1 + \left\lfloor \frac{n_1^2}{4} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{n_2^2}{4} \right\rfloor \\ &\leq 2 + \frac{n_1^2}{4} + \frac{n_2^2}{4} = 2 + \frac{(n_1 + n_2)^2}{4} - \frac{n_1 n_2}{2} = 2 + \frac{n^2}{4} - \frac{n_1 n_2}{2}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Jeśli przynajmniej jedna z liczb n_1, n_2 jest większa lub równa 4, to z ostatniej nierówności otrzymujemy

$$1 + \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \leq \frac{n^2}{4},$$

co jest niemożliwe. Natomiast, gdy $(n_1, n_2) \in \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$, to równość (2.1.5) nie zachodzi. Stąd wynika, że $n \in \{2, 3\}$. Istotnie, dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 4$ w zapisie $n = n_1 + n_2$ liczby n_1, n_2 spełniają jeden z poniższych warunków:

- $n_1 \geq 4$ lub $n_2 \geq 4$,
- $(n_1, n_2) \in \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$,

które powyżej wykluczaliśmy. Dowód został zakończony. $\square$

Z twierdzenia Schura wynika, że maksymalny wymiar przemiennych podalgebr $M_2(K)$ jest równy 2, a maksymalny wymiar przemiennych podalgebr $M_3(K)$ jest równy 3. Zatem

$$\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

są przykładami przemiennych podalgebr odpowiednio $M_2(K)$ i $M_3(K)$ maksymalnych wymiarów, które rozkładają się na sumę prostą algebr.

W dowodzie poniższego lematu użyjemy argumentów z dowodu [45, Proposition 10].

Lemat 2.1.6. *Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym oraz niech $\mathcal{A}$ będzie przemienną podalgebrą algebry $M_n(K)$, która nie rozkłada się na sumę prostą algebr. Wtedy $\mathcal{A}$ jest sumą prostą podprzestrzeni liniowych $KI_n \oplus J(\mathcal{A})$.*

Dowód. Ponieważ $\mathcal{A}$ jest przemienną algebrą skończonego wymiaru oraz K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to z twierdzenia Artina–Wedderburna wynika, że

$$\mathcal{A}/J(\mathcal{A}) \simeq K_1 \times K_2 \times \dots \times K_t,$$

gdzie t jest pewną liczbą naturalną oraz $K_1 = K_2 = \dots = K_t = K$. Pokażemy, że $t = 1$. Załóżmy przeciwnie. Radykał Jacobsona algebry skończonego wymiaru jest największym ideałem nilpotentnym. Zatem z Twierdzenia 1.0.13 istnieje idempotent $f \in \mathcal{A}$ taki, że jego obraz przy naturalnym homomorfizmie na algebrę ilorazową $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ odpowiada idempotentowi $(1, 0, 0, \dots, 0)$. Co więcej, idempotent f jest centralny, ponieważ algebra $\mathcal{A}$ jest przemienna. W takim razie z Uwagi 1.0.11 algebra $\mathcal{A}$ rozkłada się na sumę prostą algebr. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że $\mathcal{A}/J(\mathcal{A}) \simeq K$.

Ponieważ $J(\mathcal{A})$ jest przecięciem wszystkich maksymalnych ideałów lewostronnych algebry $\mathcal{A}$, to $I_n \notin J(\mathcal{A})$, więc $KI_n \cap J(\mathcal{A}) = \{0_n\}$. Zatem wymiar sumy prostej podprzestrzeni liniowych $KI_n \oplus J(\mathcal{A})$ jest równy

$$1 + \dim J(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A}/J(\mathcal{A}) + \dim J(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A}.$$

Stąd $\mathcal{A}$ jest sumą prostą podprzestrzeni liniowych $KI_n \oplus J(\mathcal{A})$, co kończy dowód. $\square$

Wniosek 2.1.7. Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym oraz niech $\mathcal{A}$ będzie przemienną podalgebrą algebry $M_n(K)$, która nie rozkłada się na sumę prostą algebr. Wtedy istnieje macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ taka, że $X^{-1}\mathcal{A}X \subseteq U_n^*(K)$.

Dowód. Na mocy Twierdzenia 1.0.16 algebra $\mathcal{A}$ jest triangularyzowalna. Istnieje więc macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ taka, że $X^{-1}\mathcal{A}X \subseteq U_n(K)$. Ponieważ radykał Jacobsona algebry skończonego wymiaru jest największym ideałem nilpotentnym, to $X^{-1}J(\mathcal{A})X$ jest ideałem nilpotentnym algebry $X^{-1}\mathcal{A}X$. Stąd wynika, że

$$X^{-1}J(\mathcal{A})X \subseteq \begin{pmatrix} 0 & K & K & \dots & K \\ 0 & 0 & K & \dots & K \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & K \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.6)$$

Istotnie, macierze górnotrójkątne z niezerowym elementem na głównej przekątnej nie są nilpotentne. Z zawierania (2.1.6), równości $X^{-1}KI_nX = KI_n$ oraz rozkładu algebry $\mathcal{A}$ na sumę prostą podprzestrzeni $KI_n \oplus J(\mathcal{A})$ (otrzymanego w poprzednim lemacie) wynika, że $X^{-1}\mathcal{A}X \subseteq U_n^*(K)$. To kończy dowód. $\square$

Stwierdzenie 2.1.8. Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech $\mathcal{A}$ będzie przemienną podalgebrą algebry $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru, gdzie $n \in \{2, 3\}$. Wtedy $\mathcal{A}$ jest sprzężona z jedną z następujących algebr:

$$C_2^1(K) = KI_2 + \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2^2(K) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad C_3^1(K) = KI_3 + \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3^2(K) = KI_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3^3(K) = KI_3 + K \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3^4(K) = K \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}, \quad C_3^5(K) = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}.$$

Dowód. Rozpatrzmy dwa wykluczające się przypadki, dotyczące możliwości rozłożenia rozważanej algebry na sumę prostą właściwych podalgebr.

Najpierw załóżmy, że algebra $\mathcal{A}$ nie rozkłada się na sumę prostą algebr. Wtedy na mocy Wniosku 2.1.7 algebra $\mathcal{A}$ jest sprzężona z pewną podalgebrą C algebry $U_n^*(K)$.

Dla $n = 2$, algebra C jest równa

$$C_2^1(K) = KI_2 + \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.7)$$

Jeśli $n = 3$, to dla dowolnego elementu $x \in K$ macierz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ jest przemienna z każdą macierzą należącą do $U_3^*(K)$. Stąd wynika, że

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq C.$$

Z twierdzenia Schura maksymalny wymiar przemiennej podalgebry $M_3(K)$ jest równy 3. Zatem istnieją elementy $\alpha, \beta \in K$ nie będące jednocześnie zerami takie, że macierze

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

są bazowe dla algebry C jako przestrzeni liniowej. Możemy więc zapisać

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x & \alpha y & z \\ 0 & x & \beta y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} : x, y, z \in K \right\}.$$

Jeśli $\alpha \neq 0$, a $\beta = 0$, to algebra C jest równa

$$C_3^1(K) = KI_3 + \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.8)$$

Dla $\alpha = 0$ i $\beta \neq 0$, algebra C jest równa

$$C_3^2(K) = KI_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.9)$$

W ostatnim przypadku, gdy $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$, algebra C jest sprzężona z

$$C_3^3(K) = KI_3 + K \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.10)$$

Wynika to z równości

$$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \alpha y & z \\ 0 & x & \beta y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & \alpha^{-1}z\beta^{-1} \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

Założmy teraz, że algebra $\mathcal{A}$ rozkłada się na sumę prostą podalgebr. Wtedy z Lematu 2.1.4 algebra $\mathcal{A}$ jest sprzężona z podalgebrą C' w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_1 & 0_{\ell \times (n-\ell)} \\ 0_{(n-\ell) \times \ell} & \mathcal{A}'_2 \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{A}'_1$ i $\mathcal{A}'_2$ są przemiennymi podalgebrami odpowiednio $M_\ell(K)$ i $M_{n-\ell}(K)$, a ℓ jest pewną liczbą naturalną. Ponieważ $\mathcal{A}$ jest przemienną podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru, to także $\mathcal{A}'_1$ i $\mathcal{A}'_2$ mają maksymalne możliwe wymiary. Gdy $n = 2$, to algebra C' jest równa algebrze

$$C_2^2(K) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}. \quad (2.1.11)$$

Aby zakończyć dowód, rozważmy przypadek, gdy $n = 3$. Z udowodnionej części twierdzenia wynika, że wystarczy rozpatrzyć sytuację, w której $\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2 \in \{K, C_2^1(K), C_2^2(K)\}$.

Jeśli $\mathcal{A}'_1 = C_2^1(K)$ i $\mathcal{A}'_2 = K$ lub $\mathcal{A}'_1 = K$ i $\mathcal{A}'_2 = C_2^1(K)$, to algebra C' jest równa odpowiednio

$$\Lambda_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} : x, y, z \in K \right\} \quad \text{lub} \quad \Lambda_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & z \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} : x, y, z \in K \right\}.$$

Algebry Λ_1 i Λ_2 są ze sobą sprzężone, ponieważ dla macierzy $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ zachodzi równość $Z^{-1}\Lambda_1 Z = \Lambda_2$. Zatem w tym przypadku algebra C' jest sprzężona z

$$C_3^4(K) = \Lambda_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} : x, y, z \in K \right\}. \quad (2.1.12)$$

Jeśli $\mathcal{A}'_1 = C_2^2(K)$ i $\mathcal{A}'_2 = K$ lub $\mathcal{A}'_1 = K$ i $\mathcal{A}'_2 = C_2^2(K)$, to algebra C' jest równa

$$C_3^5(K) = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}. \quad (2.1.13)$$

Pokazaliśmy, że algebra $\mathcal{A}$ jest sprzężona z jedną z podalgebr określonych wzorami (2.1.7)–(2.1.13). To kończy dowód, ponieważ wymienione podalgebry pokrywają się z podalgebrami podanymi w stwierdzeniu. $\square$

Wśród algebr $C_2^1(K)$, $C_2^2(K)$, $C_3^1(K)$, $C_3^2(K)$, $C_3^3(K)$, $C_3^4(K)$ oraz $C_3^5(K)$ tylko $C_3^1(K)$ i $C_3^2(K)$ są izomorficzne. Jednak jak wcześniej odnotowaliśmy, nie są one sprzężone. Zatem Twierdzenie 2.1.3 i Stwierdzenie 2.1.8 możemy podsumować następująco:

Wniosek 2.1.9. Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym, natomiast $\mathcal{A}$ niech będzie przemienną podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru. Wtedy $\mathcal{A}$ jest sprzężona z dokładnie jedną z algebr $C_n^t(K)$, gdzie

- $t = 1$, jeśli n jest liczbą parzystą większą lub równą 4 albo, gdy $n = 1$,
- $t \in \{1, 2\}$, jeśli n jest liczbą nieparzystą większą lub równą 5 albo, gdy $n = 2$,
- $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, jeśli $n = 3$.

Zatem żadna para różnych algebr $C_n^t(K)$ nie jest sprzężona. Co więcej, izomorficzne są jedynie algebry $C_n^1(K)$ i $C_n^2(K)$, gdy n jest liczbą nieparzystą większą lub równą 3.

Bez dodatkowego założenia o ciele Stwierdzenie 2.1.8 nie jest prawdziwe. Na przykład

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

jest przemienną podalgebrą $M_2(\mathbb{R})$ maksymalnego wymiaru. W Przykładzie 1.0.4 pokazaliśmy, że $\mathcal{A}$ i $\mathbb{C}$ jako algebry nad ciałem $\mathbb{R}$ są izomorficzne. Stąd wynika, że algebra $\mathcal{A}$ nie jest ona sprzężona z $C_2^1(\mathbb{R})$ ani $C_2^2(\mathbb{R})$.

Dla dowolnej liczby pierwszej p podobnie możemy określić przemienną podalgebrę $\left\{ \begin{pmatrix} a & pb \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ algebry $M_2(\mathbb{Q})$. Z [34, Exercise 3b), s. 13] wynika, że tak określone algebry dla różnych liczb pierwszych nie są izomorficzne. To pokazuje, że istnieje nieskończenie wiele przemiennych podalgebr $M_2(\mathbb{Q})$ maksymalnych wymiarów, które nie są izomorficzne.

2.2 Maksymalne przemienne podalgebry algebry $M_n(K)$

Ten podrozdział dotyczy maksymalnych przemiennych podalgebr $M_n(K)$. Zaczniemy go od podania przykładów, które wykorzystamy w dalszej części.

Przykład 2.2.1. Niech K będzie dowolnym ciałem oraz n niech będzie dowolną liczbą naturalną. Uzasadnimy, że

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{A}_2 = KI_n + \begin{pmatrix} 0_{n_1} & M_{n_1 \times n_2}(K) \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix},$$

gdzie n_1 i n_2 są dowolnymi liczbami naturalnymi spełniającymi równość $n_1 + n_2 = n$, są maksymalnymi przemiennymi podalgebrami algebry $M_n(K)$. Ponieważ $\mathcal{A}_1$ oraz $\mathcal{A}_2$ są przemiennymi podalgebrami $M_n(K)$, to zostaje do pokazania ich maksymalność. Aby to zrobić, wystarczy sprawdzić, że dowolna macierz

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K),$$

która jest przemienna ze wszystkimi macierzami rozpatrywanej podalgebry, należy do tej podalgebry.

Założmy najpierw, że macierz X jest przemienna z każdą macierzą należącą do algebry $\mathcal{A}_1$. Niech i będzie dowolną liczbą ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Ponieważ macierz e_{ii} należy do algebry $\mathcal{A}_1$, to iloczynny

$$e_{ii}X = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ x_{i1} & \dots & x_{ii} & \dots & x_{in} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad Xe_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_{ii} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_{ni} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

są równe. Stąd dla dowolnego indeksu j różnego od i spełnione są równości $x_{ij} = x_{ji} = 0$. Zatem z dowolności liczby i wynika, że macierz X ma niezerowe wyrazy jedynie na głównej przekątnej. To pokazuje, że $X \in \mathcal{A}_1$. Stąd otrzymujemy, że $\mathcal{A}_1$ jest maksymalną przemienną podalgebrą $M_n(K)$.

Założmy teraz, że macierz X jest przemienna z każdą macierzą należącą do algebry $\mathcal{A}_2$. Zapiszmy ją w postaci blokowej $\begin{pmatrix} S & T \\ U & W \end{pmatrix}$, gdzie

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1,n_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n_1,1} & \dots & s_{n_1,n_1} \end{pmatrix} \in M_{n_1}(K), \quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1,n_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n_1,1} & \dots & t_{n_1,n_2} \end{pmatrix} \in M_{n_1 \times n_2}(K),$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1,n_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n_2,1} & \dots & u_{n_2,n_1} \end{pmatrix} \in M_{n_2 \times n_1}(K), \quad W = \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1,n_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n_2,1} & \dots & w_{n_2,n_2} \end{pmatrix} \in M_{n_2}(K).$$

Ponieważ

$$\begin{pmatrix} 0_{n_1} & M_{n_1 \times n_2}(K) \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{A}_2, \quad \text{to} \quad \begin{pmatrix} 0_{n_1} & T \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2.$$

Macierz $\begin{pmatrix} 0_{n_1} & T \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix}$ jest przemienna z każdą macierzą algebry $\mathcal{A}_2$, ponieważ algebra $\mathcal{A}_2$ jest przemienna. Zatem również macierz

$$\begin{pmatrix} S & 0_{n_1 \times n_2} \\ U & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & T \\ U & W \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0_{n_1} & T \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix}$$

jest przemienna z każdą macierzą algebry $\mathcal{A}_2$. Stąd i z faktu, że dla każdej liczby $i \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ element e_{1, n_1+i} należy do $\mathcal{A}_2$, otrzymujemy

$$e_{1, n_1+i} \cdot \begin{pmatrix} S & 0_{n_1 \times n_2} \\ U & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0_{n_1 \times n_2} \\ U & W \end{pmatrix} \cdot e_{1, n_1+i},$$

co daje

$$\begin{pmatrix} u_{i1} & u_{i2} & \dots & u_{in_1} & w_{i1} & \dots & w_{ii} & \dots & w_{in_2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \dots 0}^{n_1+i-1 \text{ razy}} & s_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & s_{n_1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{n_2,1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Z powyższej równości wynika, że $u_{ij} = 0$ dla każdego $j \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, $w_{ik} = 0$ dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n_2\} \setminus \{i\}$ oraz $w_{ii} = s_{11}$. Zatem z dowolności indeksu $i \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ dostajemy równości $U = 0_{n_2 \times n_1}$ oraz $W = s_{11}I_{n_2} = w_{11}I_{n_2}$.

Założmy teraz, że j jest dowolną liczbą ze zbioru $\{1, 2, \dots, n_1\}$. Ponieważ element e_{j, n_1+1} należy do algebry $\mathcal{A}_2$ oraz pokazaliśmy, że $U = 0_{n_2 \times n_1}$, to podobnie jak wcześniej uzasadniamy, że iloczynny

$$e_{j, n_1+1} \cdot \begin{pmatrix} S & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & W \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} S & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & W \end{pmatrix} \cdot e_{j, n_1+1}$$

są równe. Stąd otrzymujemy, że

$$j\text{-ty wiersz} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w_{11} & \dots & w_{1, n_2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \dots 0}^{n_1 \text{ razy}} & s_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & s_{j-1,j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s_{jj} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & s_{n_1,j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Zatem z dowolności liczby $j \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ dostajemy równość $S = w_{11}I_{n_1}$.

Podsumowując, w dwóch powyższych akapitach pokazaliśmy, że $S = w_{11}I_{n_1}$, $U = 0_{n_2 \times n_1}$, $W = w_{11}I_{n_2}$. Z blokowego przedstawienia macierzy X wynika więc, że należy ona do algebry $\mathcal{A}_2$. Zatem $\mathcal{A}_2$ jest maksymalną przemienną podalgebrą $M_n(K)$.

Pokażemy, że badanie wymiaru maksymalnej przemiennej podalgebry $M_n(K)$ możemy ograniczyć do algebraicznie domkniętych ciał K . W tym celu zastosujemy iloczyn tensorowy. Dokładne wyjaśnienie tej konstrukcji wraz z przykładami jest podane na przykład w Rozdziale 4 książki [10].

Dowód następnego lematu bazuje na dowodzie ogólniejszego wyniku przedstawionego w [10, Proposition 4.31].

Lemat 2.2.2. *Niech $\mathcal{A}$ będzie maksymalną przemienną podalgebrą $M_n(K)$. Wtedy $\mathcal{A} \otimes_K \overline{K}$, gdzie $\overline{K}$ jest algebraicznym domknięciem ciała K , jest maksymalną przemienną podalgebrą algebry $M_n(K) \otimes_K \overline{K}$.*

Dowód. Dla dowolnych tensorów prostych $a_1 \otimes \beta_1$ i $a_2 \otimes \beta_2$ algebry $\mathcal{A} \otimes_K \overline{K}$ mamy

$$(a_1 \otimes \beta_1)(a_2 \otimes \beta_2) = a_1 a_2 \otimes \beta_1 \beta_2, \quad (a_2 \otimes \beta_2)(a_1 \otimes \beta_1) = a_2 a_1 \otimes \beta_2 \beta_1$$

(przez [10, Lemma 4.19] powyższe mnożenie jest dobrze określone). Ponieważ podalgebra $\mathcal{A}$ jest przemienna i mnożenie w ciele jest przemienne, to iloczyny $(a_1 \otimes \beta_1)(a_2 \otimes \beta_2)$ oraz $(a_2 \otimes \beta_2)(a_1 \otimes \beta_1)$ są równe. Zatem $\mathcal{A} \otimes_K \overline{K}$ jest przemienną podalgebrą $M_n(K) \otimes_K \overline{K}$.

Pokażemy teraz, że $\mathcal{A} \otimes_K \overline{K}$ jest maksymalną przemienną podalgebrą $M_n(K) \otimes_K \overline{K}$. Aby to zrobić, wystarczy wykazać, że dowolny element $x \in M_n(K) \otimes_K \overline{K}$, który jest przemienny z każdym elementem $\mathcal{A} \otimes_K \overline{K}$, należy do $\mathcal{A} \otimes_K \overline{K}$. Niech $F_1, F_2, \dots, F_{n^2}$ będą macierzami, które tworzą bazę $M_n(K)$ jako przestrzeni liniowej nad K i niech J będzie zbiorem indeksów takim, że wektory należące do $\{\gamma_j : j \in J\}$ tworzą bazę $\overline{K}$ jako przestrzeni liniowej nad K . Wtedy $F_i \otimes \gamma_j$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n^2\}$, $j \in J$ są wektorami bazowymi $M_n(K) \otimes_K \overline{K}$ jako przestrzeni liniowej nad K (patrz [10, Theorem 4.12]). Zatem x jest kombinacją liniową ze współczynnikami w ciele K wektorów $F_i \otimes \gamma_j$. Możemy ją zapisać w postaci

$$\sum_{j \in J} X_j \otimes \gamma_j \tag{2.2.1}$$

dla pewnych $X_j \in M_n(K)$, bo dla dowolnych indeksów $i, k \in \{1, 2, \dots, n^2\}$, $j \in J$ oraz współczynników $\alpha_{ij}, \alpha_{kj} \in K$ spełniona jest równość

$$\alpha_{ij}(F_i \otimes \gamma_j) + \alpha_{kj}(F_k \otimes \gamma_j) = (\alpha_{ij}F_i + \alpha_{kj}F_k) \otimes \gamma_j.$$

Ponieważ x jest przemienny z każdym elementem $\mathcal{A} \otimes_K \overline{K}$, to dla dowolnego $a \in \mathcal{A}$ mamy

$$\sum_{j \in J} aX_j \otimes \gamma_j = (a \otimes 1)x = x(a \otimes 1) = \sum_{j \in J} X_j a \otimes \gamma_j.$$

Stąd $\sum_{j \in J} (aX_j - X_j a) \otimes \gamma_j = 0$. Wektory γ_j są liniowo niezależne, więc z [10, Lemma 4.10] $aX_j - X_j a = 0$ dla każdego $j \in J$. To pokazuje, że każdy element X_j występujący w sumie (2.2.1) jest przemienny z a . Z dowolności a oraz z tego, że $\mathcal{A}$ jest maksymalną przemienną podalgebrą $M_n(K)$ wynika, że $X_j \in \mathcal{A}$ dla każdego $j \in J$. Zatem $x \in \mathcal{A} \otimes_K \overline{K}$, co kończy dowód. $\square$

Algebra $M_n(K) \otimes_K \overline{K}$ jest izomorficzna z $M_n(\overline{K})$ (patrz [10, Example 4.22]). Ponadto, wymiar algebry $\mathcal{A}$ jako przestrzeni liniowej nad K jest równy wymiarowi algebry $\mathcal{A} \otimes_K \overline{K}$ jako przestrzeni liniowej nad $\overline{K}$. Zatem z udowodnionego lematu wynika, że do wyznaczenia najmniejszego wymiaru maksymalnej przemiennej podalgebry $M_n(K)$, możemy

założyć, że ciało K jest algebraicznie domknięte. Wymiar ten zgodnie z ograniczeniem znalezionym przez Gustafsona w [20] i przykładami wskazanymi przez Laffey'a w [27] jest rzędu $n^{\frac{2}{3}}$. Okazuje się, że nakładając na maksymalne przemienne podalgebry $M_n(K)$ pewne dodatkowe warunki, otrzymamy klasę, w której każda algebra ma wymiar większy lub równy n .

Lemat 2.2.3. *Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym. Niech $\mathcal{A}$ będzie maksymalną przeminną podalgebrą $M_n(K)$, która nie rozkłada się na sumę prostą algebr taką, że $J(\mathcal{A})^2 = \{0_n\}$. Wtedy spełniony jest jeden z poniższych warunków:*

- a) $n = 1$ i $\mathcal{A} = K$,
- b) $n > 1$ i istnieje macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ oraz liczby naturalne n_1, n_2 , spełniające równość $n_1 + n_2 = n$ takie, że algebra $X^{-1}\mathcal{A}X$ jest równa

$$KI_n + \begin{pmatrix} 0_{n_1} & M_{n_1 \times n_2}(K) \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix}. \quad (2.2.2)$$

Dowód. Skorzystamy z Wniosku 2.1.6. Wynika z niego, że $\mathcal{A}$ jest sumą prostą podprzestrzeni liniowych KI_n oraz $J(\mathcal{A})$.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy ideał $J(\mathcal{A})$ jest zerowy. Pokażemy, że wtedy $n = 1$. Przypuśćmy przeciwnie. Wówczas

$$\mathcal{A} = KI_n \subsetneq \begin{pmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K \end{pmatrix}.$$

Algebra, która w powyższym wzorze właściwie zawiera algebrę $\mathcal{A}$, jest przemienność. Przeczy to temu, że $\mathcal{A}$ jest maksymalną przeminną podalgebrą $M_n(K)$. Pokazaliśmy więc, że w rozważanym przypadku $n = 1$. Zatem spełniony jest warunek a) z lematu.

Założmy teraz, że ideał $J(\mathcal{A})$ jest niezerowy. Wtedy $J(\mathcal{A})$ jest ideałem nilpotentnym, którego indeks nilpotentności jest równy 2. Ze Stwierdzenia 1.0.20 oraz rozkładu algebry $\mathcal{A}$ na sumę prostą przestrzeni KI_n i $J(\mathcal{A})$ wynika, że istnieje macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ oraz liczby naturalne n_1, n_2 spełniające równość $n_1 + n_2 = n$ takie, że $X^{-1}\mathcal{A}X$ zawiera się w algebrze określonej wzorem (2.2.2). Ponieważ $X^{-1}\mathcal{A}X$ jest maksymalną przeminną podalgebrą $M_n(K)$, natomiast algebra określona wzorem (2.2.2) jest przemienność, to te dwie algebry są równe. Zatem pokazaliśmy, że w przypadku gdy $J(\mathcal{A})$ jest ideałem niezerowym, spełniony jest warunek b) z lematu. To kończy dowód. $\square$

Uwaga 2.2.4. Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą z Lematu 2.2.3. Jeśli $n > 1$, to na mocy tego lematu istnieją liczby naturalne n_1, n_2 spełniające równość $n_1 + n_2 = n$, dla których $\dim \mathcal{A} = 1 + n_1 n_2$. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że $n_1 n_2 = n_1(n - n_1) \geq n - 1$. Zatem $\dim \mathcal{A} \geq n$. Jeśli $n = 1$, to $\mathcal{A} = K$ i nierówność $\dim \mathcal{A} \geq n$ jest także spełniona.

Wniosek 2.2.5. Niech $\mathcal{A}$ będzie maksymalną przemienną podalgebrą $M_n(K)$ taką, że $J(\mathcal{A})^2 = \{0_n\}$. Wtedy $\dim \mathcal{A} \geq n$.

Dowód. Jeżeli algebra $\mathcal{A}$ nie rozkłada się na sumę prostą algebr, to wniosek jest treścią Uwagi 2.2.4. Załóżmy więc, że $\mathcal{A}$ rozkłada się na sumę prostą $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, dla pewnych podalgebr $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$. Wtedy na mocy Lematu 2.1.4 istnieją liczby naturalne ℓ_1, ℓ_2 spełniające równość $\ell_1 + \ell_2 = n$ i podalgebry $\mathcal{A}'_1 \subseteq M_{\ell_1}(K)$ oraz $\mathcal{A}'_2 \subseteq M_{\ell_2}(K)$ takie, że algebra $\mathcal{A}$ jest sprzężona z algebrą

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_1 & 0_{\ell_1 \times \ell_2} \\ 0_{\ell_2 \times \ell_1} & \mathcal{A}'_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.3)$$

Algebra $\mathcal{A}$ jest maksymalną przemienną podalgebrą $M_n(K)$, więc również $\mathcal{A}'_1$ i $\mathcal{A}'_2$ są maksymalnymi przemiennymi podalgebrami odpowiednio $M_{\ell_1}(K)$ i $M_{\ell_2}(K)$. Powtarzając to rozumowanie, znajdujemy liczby naturalne $n_1, n_2, \dots, n_t$, dla pewnego t , spełniające równanie $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$ oraz maksymalne przemiennie podalgebry $\mathcal{A}''_i \subseteq M_{n_i}(K)$ dla $i = 1, 2, \dots, t$, które nie są rozkładalne na sumę prostą algebr takie, że algebry $\mathcal{A}$ oraz

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}''_1 & 0_{n_1 \times n_2} & \cdots & 0_{n_1 \times n_t} \\ 0_{n_2 \times n_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{n_{t-1} \times n_t} \\ 0_{n_t \times n_1} & \cdots & 0_{n_t \times n_{t-1}} & \mathcal{A}''_t \end{pmatrix}$$

są sprzężone. Co więcej, z równości $J(\mathcal{A})^2 = \{0_n\}$ wynika, że radykał Jacobsona powyższej algebry jest ideałem zerowym lub jest ideałem nilpotentnym o indeksie nilpotentności równym 2. Zatem ideały $J(\mathcal{A}''_1)^2, J(\mathcal{A}''_2)^2, \dots, J(\mathcal{A}''_t)^2$ są zerowe. W takim razie do każdej z algebr $\mathcal{A}''_1, \mathcal{A}''_2, \dots, \mathcal{A}''_t$ możemy zastosować Uwagę 2.2.4. Stąd otrzymujemy nierówność

$$\dim \mathcal{A} = \sum_{i=1}^t \dim \mathcal{A}''_i \geq \sum_{i=1}^t n_i = n,$$

która kończy dowód. □

Rozdział 3

D_q podalgebry $M_n(K)$

W tym rozdziale będziemy badać maksymalne podalgebry algebr $M_n(K)$ z tożsamością wielomianową

$$[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_q, y_q] = 0,$$

gdzie q jest dowolną liczbą naturalną, większą lub równą 2. Udowodnimy, że dowolna taka podalgebra $\mathcal{A}$ jest sprzężona z podalgebrą blokowo trójkątną, której diagonalne bloki są algebrami przemiennymi. Ponadto będziemy badali sprzężenia w klasie takich podalgebr i izomorfizmy w podobnie określonych klasach podalgebr blokowo trójkątnych. Rozdział zakończymy charakteryzacją podalgebr blokowo trójkątnych, które są sprzężone z podalgebrami $\mathcal{A}$ algebry $M_n(K)$ z tożsamością wielomianową

$$[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_q, y_q] = 0$$

maksymalnych wymiarów.

3.1 Wprowadzenie i podstawowe definicje

W tym podrozdziale wprowadzimy definicje dotyczące algebr, które spełniają tożsamość wielomianową $[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_q, y_q] = 0$, gdzie q jest liczbą naturalną oraz definicje pewnych klas podalgebr algebry $M_n(K)$. Zilustrujemy je przykładami.

Definicja 3.1.1. Niech q będzie dowolną liczbą naturalną. Algebrę $\mathcal{A}$ z tożsamością wielomianową $[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_q, y_q] = 0$, która dla $q > 1$ nie jest algebrą z tożsamością $[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_{q-1}, y_{q-1}] = 0$, nazwiemy D_q algebrą.

Z definicji wynika, że D_1 algebry to dokładnie algebry przemienne. W kolejnych podrozdziałach będziemy badali podalgebry $M_n(K)$, które są D_q algebrami. Będziemy je nazywać D_q podalgebrami $M_n(K)$. Ze względu na to, że poprzedni rozdział dotyczył przemiennych podalgebr $M_n(K)$, w rozważaniach naszych zakładamy, że $q > 1$.

Nazwa powyżej zdefiniowanej algebry pochodzi od nazwiska matematyka Mátyása Domokosa. Pokazał on w [14], że dla dowolnych liczb naturalnych n i q takich, że $q \leq n$

istnieją liczby naturalne $n_1, n_2, \dots, n_q$ spełniające równanie $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$ takie, że maksymalny wymiar D_q podalgebry $M_n(K)$ jest równy

$$\frac{n^2}{2} + q - \sum_{i=1}^q \left(\frac{n_i^2}{2} - \left\lfloor \frac{n_i^2}{4} \right\rfloor \right). \quad (3.1.1)$$

Przykładem D_n podalgebry $M_n(K)$ jest algebra $U_n(K)$. Aby wskazać przykłady D_q podalgebr $M_n(K)$ dla $q < n$, rozpatrzmy blokowo trójkątne podalgebry $M_n(K)$.

Definicja 3.1.2. Dla liczb naturalnych $q, n_1, n_2, \dots, n_q$ takich, że $q \geq 2$ oraz $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$, określmy blokowo trójkątną podalgebrę $M_n(K)$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \dots & \mathcal{A}_{1q} \\ & \mathcal{A}_{22} & \dots & \mathcal{A}_{2q} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathcal{A}_{qq} \end{pmatrix}, \quad (3.1.2)$$

gdzie

- $\mathcal{A}_{ii}$ jest podalgebrą $M_{n_i}(K)$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$,
- $\mathcal{A}_{ij}$ jest podprzestrzenią liniową $M_{n_i \times n_j}(K)$ dla każdych indeksów i, j spełniających nierówności $1 \leq i < j \leq q$,
- wszystkie inne wyrazy są zerowe.

Wtedy powiemy, że $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Jeśli dodatkowo $\mathcal{A}_{ij} = M_{n_i \times n_j}(K)$ dla $1 \leq i \leq j \leq q$, to $\mathcal{A}$ nazwiemy pełną podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$.

Przykład 3.1.3. Rozpatrzmy następujące podalgebry $M_4(K)$

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \boxed{K} & \boxed{K} & 0 & \boxed{K} \\ 0 & \boxed{K} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{K} & \boxed{K} \\ 0 & 0 & \boxed{K} & \boxed{K} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{K} & \boxed{K} & \boxed{K} & \boxed{K} \\ \boxed{K} & \boxed{K} & \boxed{K} & \boxed{K} \\ 0 & 0 & \boxed{K} & \boxed{K} \\ 0 & 0 & \boxed{K} & \boxed{K} \end{pmatrix}.$$

Wtedy $\mathcal{A}_1$ jest podalgebrą $M_4(K)$ kształtu $(1, 1, 2)$, której bloki $\mathcal{A}_{13}$ i $\mathcal{A}_{23}$ są podprzestrzeniami liniowymi $M_{2 \times 1}(K)$ różnymi od tej przestrzeni. Nie jest ona pełną podalgebrą $M_4(K)$ kształtu $(1, 1, 2)$. Natomiast $\mathcal{A}_2$ jest pełną podalgebrą $M_4(K)$ kształtu $(2, 2)$.

Zapisując algebrę w postaci (3.1.2) rozumiemy, że

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ 0_{n_2 \times n_1} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{n_q \times n_1} & \dots & 0_{n_q \times n_{q-1}} & A_{qq} \end{pmatrix} : A_{ij} \in \mathcal{A}_{ij} \text{ dla } 1 \leq i \leq j \leq q \right\}.$$

Poniższa definicja związana jest z sytuacjami, w których rozważana algebra $\mathcal{A}$ nie jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$, ale zawiera się w pełnej podalgebrze $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$.

Definicja 3.1.4. Niech $\mathcal{A}$ będzie podalgebrą $M_n(K)$ zawartą w pełnej podalgebrze $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ określmy

$$\overline{\mathcal{A}}_{ii} = \left\{ A_{ii} \in M_{n_i}(K) : \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1i} & \dots & A_{1q} \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & A_{ii} & \dots & A_{iq} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & A_{qq} \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \right\}. \quad (3.1.3)$$

Wtedy $\overline{\mathcal{A}}_{ii}$ jest podalgebrą $M_{n_i}(K)$, jednak nie zawsze

$$\begin{pmatrix} 0_{n_1} & \dots & 0_{n_1 \times n_{i-1}} & 0_{n_1 \times n_i} & 0_{n_1 \times n_{i+1}} & \dots & 0_{n_1 \times n_q} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0_{n_{i-1}} & 0_{n_{i-1} \times n_i} & 0_{n_{i-1} \times n_{i+1}} & \dots & 0_{n_{i-1} \times n_q} \\ & & & \overline{\mathcal{A}}_{ii} & 0_{n_i \times n_{i+1}} & \dots & 0_{n_i \times n_q} \\ & & & & 0_{n_{i+1}} & \dots & 0_{n_{i+1} \times n_q} \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0_{n_q} \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{A}. \quad (3.1.4)$$

Zilustrujemy to na przykładzie, który jest związany z twierdzeniem [32, Theorem 2.1]. Wspomniane twierdzenie przedstawimy w podrozdziale 5.2.

Przykład 3.1.5. Określmy podalgebrę $U_9(K)$

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & e & f & g & t & u & v \\ 0 & a & d & 0 & e & h & 0 & t & w \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & e & 0 & 0 & t \\ \hline 0 & 0 & 0 & a & b & c & p & q & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & d & 0 & p & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array} \end{pmatrix} : a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r, s, t, u, v, w \in K \right\}.$$

Tak określona algebra zawiera się w pełnej podalgebrze $M_9(K)$ kształtu $(3, 3, 3)$. Dowolną macierz X należącą do $\mathcal{A}$ możemy zapisać w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ 0_3 & X_{11} & X_{23} \\ 0_3 & 0_3 & X_{11} \end{pmatrix},$$

dla pewnych macierzy $X_{ij} \in U_3^*(K)$, $1 \leq i \leq j \leq 3$. Zgodnie z wprowadzoną definicją mamy $\overline{\mathcal{A}}_{11} = \overline{\mathcal{A}}_{22} = \overline{\mathcal{A}}_{33} = U_3^*(K)$, jednak dla żadnego z $i \in \{1, 2, 3\}$ nie jest spełnione zawieranie (3.1.4).

Uwaga 3.1.6. Niech $\mathcal{A}$ będzie podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ określoną wzorem (3.1.2), dla której $\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22}, \dots, \mathcal{A}_{qq}$ będące diagonalnymi blokami $\mathcal{A}$ są algebrami przemiennymi. Wtedy dla dowolnych $X, Y \in \mathcal{A}$ mamy

$$[X, Y] \in \begin{pmatrix} 0_{n_1} & \mathcal{A}_{12} & \dots & \mathcal{A}_{1q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathcal{A}_{q-1,q} \\ 0_{n_q \times n_1} & \dots & \dots & 0_{n_q} \end{pmatrix}. \quad (3.1.5)$$

Istotnie, dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ w i -tym diagonalnym bloku macierzy $[X, Y]$ znajduje się komutator pewnych macierzy należących do $\mathcal{A}_{ii}$. Jest on zerowy, ponieważ algebra $\mathcal{A}_{ii}$ jest przemienna. Stąd iloczyn dowolnych q komutatorów takiej algebry $\mathcal{A}$ jest zerowy. Jeśli dodatkowo założymy, że $\mathcal{A}_{ij} = M_{n_i \times n_j}(K)$ dla $1 \leq i < j \leq q$, to z następnej obserwacji będziemy wiedzieli, że iloczyn pewnych $q - 1$ komutatorów algebry $\mathcal{A}$ jest niezerowy. Zatem taka algebra $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$.

Stwierdzenie 3.1.7. Niech $\mathcal{A}$ będzie podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ z diagonalnymi blokami, które są przemiennymi algebrami oraz blokami $\mathcal{A}_{ij} = M_{n_i \times n_j}(K)$ dla $1 \leq i < j \leq q$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ oraz ideału $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ (patrz Definicja 1.0.17) zachodzi równość

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^i = \begin{pmatrix} 0_{n_1} & \dots & 0_{n_1 \times n_i} & M_{n_1 \times n_{i+1}}(K) & \dots & M_{n_1 \times n_q}(K) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & M_{n_{q-i} \times n_q}(K) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0_{n_{q-i+1} \times n_q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{n_1 \times n_q} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0_{n_q} \end{pmatrix}$$

Dowód. Pokażemy, że wzór jest prawdziwy dla $i = 1$. To zakończy dowód, bo wtedy postać ideału $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^i$ dla dowolnego $i > 1$ wynika z formuły na mnożenie macierzy blokowych.

Ponieważ każdy z diagonalnych bloków algebry $\mathcal{A}$ jest algebrą przemienną, to zawieranie

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \subseteq \begin{pmatrix} 0_{n_1} & M_{n_1 \times n_2}(K) & M_{n_1 \times n_3}(K) & \cdots & M_{n_1 \times n_q}(K) \\ & 0_{n_2} & M_{n_2 \times n_3}(K) & \cdots & M_{n_2 \times n_q}(K) \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & M_{n_{q-1} \times n_q}(K) \\ & & & & 0_{n_q} \end{pmatrix} \quad (3.1.6)$$

wynika z Uwagi 3.1.6. Pokażemy przeciwne zawieranie. Niech j będzie dowolną liczbą naturalną mniejszą lub równą q oraz niech macierze

$$X_{j,j+1} \in M_{n_j \times n_{j+1}}(K), \quad X_{j,j+2} \in M_{n_j \times n_{j+2}}(K), \quad \dots, \quad X_{jq} \in M_{n_j \times n_q}(K)$$

będą dowolne. Rozpatrzmy macierz, której j -ty diagonalny blok jest macierzą jednostkową I_{n_j} , a pozostałe wyrazy są zerowe oraz macierz, której bloki w miejscach $(j, j+1)$, $(j, j+2)$, $\dots$, (j, q) są równe odpowiednio macierzom $X_{j,j+1}$, $X_{j,j+2}$, $\dots$, X_{jq} , a pozostałe wyrazy są zerowe. Tak określone macierze należą do algebry $\mathcal{A}$. Oznaczmy je przez

$$\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & I_{n_j} & \\ \hline & & \end{array} \right) \quad \text{oraz} \quad \left(\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & 0_{n_j} & X_{j,j+1} & \cdots & X_{jq} \\ \hline & & & & \end{array} \right).$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & I_{n_j} & \\ \hline & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & 0_{n_j} & X_{j,j+1} & \cdots & X_{jq} \\ \hline & & & & \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & 0_{n_j} & X_{j,j+1} & \cdots & X_{jq} \\ \hline & & & & \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & 0_{n_j} & X_{j,j+1} & \cdots & X_{jq} \\ \hline & & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & I_{n_j} & \\ \hline & & \end{array} \right) &= 0_n, \end{aligned}$$

więc

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & 0_{n_j} & X_{j,j+1} & \cdots & X_{jq} \\ \hline & & & & \end{array} \right) = \left[\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & I_{n_j} & \\ \hline & & \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & 0_{n_j} & X_{j,j+1} & \cdots & X_{jq} \\ \hline & & & & \end{array} \right) \right] \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}.$$

Z dowolności liczby j , dowolności macierzy $X_{j,j+1}$, $X_{j,j+2}$, $\dots$, X_{jq} oraz z tego, że ideał jest zamknięty na dodawanie, wynika postulowane zawieranie. To dowodzi twierdzenia dla $i = 1$ oraz kończy dowód. $\square$

Korzystając z Uwagi 3.1.6 oraz z Stwierdzenia 3.1.7, możemy określić następujące klasy D_q podalgebr $M_n(K)$.

Definicja 3.1.8. Niech $\mathcal{A}$ będzie podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$, która jest zapisana w postaci blokowo trójkątnej (3.1.2). Powiemy, że $\mathcal{A}$ jest:

1. D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu, jeśli $\mathcal{A}_{ii}$ jest maksymalną przemienną podalgebrą $M_{n_i}(K)$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ oraz $\mathcal{A}_{ij} = M_{n_i \times n_j}(K)$ dla wszystkich liczb naturalnych i, j spełniających nierówności $1 \leq i < j \leq q$,
2. D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ II typu, jeśli $\mathcal{A}_{ii}$ jest przemien-
ną podalgebrą $M_{n_i}(K)$ maksymalnego wymiaru, równemu $1 + \left\lfloor \frac{n_i^2}{4} \right\rfloor$, dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ oraz $\mathcal{A}_{ij} = M_{n_i \times n_j}(K)$ dla wszystkich liczb naturalnych i, j spełniających nierówności $1 \leq i < j \leq q$.

W podrozdziale 3.2 pokażemy, że $\mathcal{A}$ jest maksymalną D_q podalgebrą $M_n(K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy algebra $\mathcal{A}$ jest sprzężona z D_q podalgebrą $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu.

Rozważmy liczbę naturalną n i ustalmy ciąg liczb naturalnych $(n_1, n_2, \dots, n_q)$, dla których $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$. Rozpatrzmy wszystkie maksymalne D_q podalgebry $M_n(K)$ sprzężone z pewną D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu. Z takich podalgebr największy wymiar mają te, które są sprzężone z pewną D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ II typu. Wymiar ten jest równy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \left(1 + \left\lfloor \frac{n_i^2}{4} \right\rfloor \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq q} n_i n_j &= q + \sum_{i=1}^q \left\lfloor \frac{n_i^2}{4} \right\rfloor + \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_q)^2}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{n_i^2}{2} \\ &= q + \frac{n^2}{2} - \sum_{i=1}^q \left(\frac{n_i^2}{2} - \left\lfloor \frac{n_i^2}{4} \right\rfloor \right). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Z ostatniej równość oraz z wyniku Domokosa podanego na początku tego podrozdziału i związanego z formułą (3.1.1) wynika, że D_q podalgebra $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ II typu jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru. Motywuje to wprowadzenie jeszcze jednej klasy D_q podalgebr $M_n(K)$.

Definicja 3.1.9. Niech $\mathcal{A}$ będzie podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ w postaci blokowo trójkątnej (3.1.2). Powiemy, że $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ III typu, jeśli $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru oraz $\mathcal{A}_{ii}$ jest przemienną podalgebrą $M_{n_i}(K)$ maksymalnego wymiaru dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, natomiast $\mathcal{A}_{ij} = M_{n_i \times n_j}(K)$ dla wszystkich liczb naturalnych i, j spełniających nierówności $1 \leq i < j \leq q$.

Ciągi $(n_1, n_2, \dots, n_q)$, dla których D_q podalgebra $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ II typu jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru, czyli jest D_q podalgebrą III typu, nie są dowolne. Były one szczegółowo analizowane w rozdziale 6 artykułu [49]. Przedstawimy uzyskaną tam charakterystykę w podrozdziale 3.5.

Przykład 3.1.10. Rozpatrzmy przemienne podalgebry

$$C_2^1(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in K \right\}, \quad C_2^2(K) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

algebry $M_2(K)$ maksymalnego wymiaru ze Stwierdzenia 2.1.8. Dodatkowo określimy następujące podalgebry $M_6(K)$

$$\mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_2 = KI_6 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_6^1(K) = KI_6 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

W Przykładzie 2.2.1 pokazaliśmy, że algebry powyższej postaci są maksymalnymi przemienymi podalgebrami algebr macierzy. Z Twierdzenia 2.1.1 wynika, że wśród nich jedynie $C_6^1(K)$ jest przemianą podalgebrą $M_6(K)$ maksymalnego wymiaru.

Korzystając z algebr $C_2^1(K), C_2^2(K), \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, C_6^1(K)$ zdefiniujemy następujące blokowo trójkątne podalgebry $M_8(K)$

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} C_2^1(K) & M_{2 \times 6}(K) \\ 0_{6 \times 2} & \mathcal{D}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} C_2^1(K) & M_{2 \times 6}(K) \\ 0_{6 \times 2} & \mathcal{D}_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} C_2^1(K) & M_{2 \times 6}(K) \\ 0_{6 \times 2} & C_6^1(K) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} C_2^2(K) & M_{2 \times 6}(K) \\ 0_{6 \times 2} & C_6^1(K) \end{pmatrix}.$$

Wtedy $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ są D_2 podalgebrami $M_8(K)$ kształtu $(2, 6)$ I typu. Co więcej, $\mathcal{A}_3$ oraz $\mathcal{A}_4$ są D_2 podalgebrami $M_8(K)$ kształtu $(2, 6)$ II typu. Wymiary algebr $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ są odpowiednio równe 20 i 23. Algebry $\mathcal{A}_3$ i $\mathcal{A}_4$ są większego wymiaru, który jest równy 24. Pomimo tego, że $\dim \mathcal{A}_3 = \dim \mathcal{A}_4$ algebry $\mathcal{A}_3$ oraz $\mathcal{A}_4$ nie są izomorficzne. Otrzymujemy to z Twierdzenia 3.4.4, które pokażemy w jednym z kolejnych podrozdziałów. Na mocy Wniosku 3.5.4, który także przedstawimy później, maksymalny wymiar D_2 podalgebry $M_8(K)$ jest równy 26. Zatem ciąg $(2, 6)$ nie wyznacza D_2 podalgebry $M_8(K)$ III typu. Przykładem takiego ciągu jest $(4, 4)$, ponieważ blokowo trójkątna podalgebra

$$\begin{pmatrix} C_4^1(K) & M_4(K) \\ 0_4 & C_4^1(K) \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad C_4^1(K) = KI_4 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & K & K \\ 0 & 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jest D_2 podalgebrą $M_8(K)$ wymiaru 26. Zatem wspomniana algebra jest D_2 podalgebrą $M_8(K)$ kształtu $(4, 4)$ III typu.

W dalszych rozważaniach, gdy będziemy rozpatrywali algebrę $\mathcal{A}$, która jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$, pełną podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ lub jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I-go, II-go lub III-go typu, to będziemy zakładali, że jest ona w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{qq} \end{pmatrix}.$$

W powyższym przedstawieniu niezaznaczone wyrazy są zerowe, natomiast postać bloków $\mathcal{A}_{ij}$ dla $1 \leq i \leq j \leq q$ jest zgodna z definicją rozważanej algebry $\mathcal{A}$ (patrz Definicja 3.1.2, Definicja 3.1.8 oraz Definicja 3.1.9).

3.2 Maksymalne D_q podalgebry $M_n(K)$

W tym podrozdziale pokażemy, że dowolna maksymalna D_q podalgebra $M_n(K)$ jest sprzężona z D_q podalgebrą $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu. Podobny opis wykażemy dla D_q podalgebr $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru. Udowodnimy, że są one sprzężone z D_q podalgebrami $M_n(K)$ III typu. W tym celu zastosujemy Stwierdzenie 1.0.20 do D_q podalgebry $M_n(K)$ i ideału generowanego przez jej komutatory. Będziemy mogli to zrobić ze względu na następujący lemat.

Lemat 3.2.1. *Niech $\mathcal{A}$ będzie D_q algebrą oraz niech $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ będzie ideałem generowanym przez komutatory algebry $\mathcal{A}$. Wtedy $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^q = \{0\}$ i q jest indeksem nilpotentności ideału $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$.*

Dowód. Aby pokazać, że ideał $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ jest nilpotentny, weźmy dowolny element $x \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ postaci

$$r_1 \cdot [x_1, y_1] \cdot r_2 \cdot [x_2, y_2] \cdot \dots \cdot r_q \cdot [x_q, y_q] \cdot r_{q+1},$$

gdzie $r_1, r_2, \dots, r_{q+1}, x_1, x_2, \dots, x_q, y_1, y_2, \dots, y_q \in \mathcal{A}$. Ponieważ elementy ideału $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^q$ są skończonymi sumami elementów powyższej postaci, to wystarczy pokazać, że $x = 0$. Dla dowolnych elementów $a, b, r \in \mathcal{A}$ zachodzi równość

$$[a, rb] = [a, r]b + r[a, b],$$

więc $r[a, b] = [a, rb] - [a, r]b$. Po podstawieniu w ostatniej równości $r = r_1$, $a = x_1$ oraz $b = y_1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & r_1 \cdot [x_1, y_1] \cdot r_2 \cdot [x_2, y_2] \cdot \dots \cdot r_q \cdot [x_q, y_q] \cdot r_{q+1} \\ &= ([x_1, r_1 y_1] - [x_1, r_1] y_1) \cdot r_2 \cdot [x_2, y_2] \cdot \dots \cdot r_q \cdot [x_q, y_q] \cdot r_{q+1} \\ &= [x_1, r_1 y_1] \cdot r_2 \cdot [x_2, y_2] \cdot \dots \cdot r_q \cdot [x_q, y_q] \cdot r_{q+1} \\ &\quad - [x_1, r_1] \cdot y_1 r_2 \cdot [x_2, y_2] \cdot \dots \cdot r_q \cdot [x_q, y_q] \cdot r_{q+1}. \end{aligned}$$

Podobnie możemy zapisać

$$[x_1, r_1 y_1] \cdot r_2 \cdot [x_2, y_2] \cdot r_3 \cdot [x_3, y_3] \cdot r_4 \cdot \dots \cdot r_q \cdot [x_q, y_q] \cdot r_{q+1}$$

$$\begin{aligned}
&= [x_1, r_1 y_1] \cdot ([x_2, r_2 y_2] - [x_2, r_2] y_2) \cdot r_3 \cdot [x_3, y_3] \cdot r_4 \dots \cdot r_q \cdot [x_q, y_q] \cdot r_{q+1} \\
&= [x_1, r_1 y_1] [x_2, r_2 y_2] \cdot r_3 \cdot [x_3, y_3] \cdot r_4 \cdot [x_4, y_4] \cdot \dots \cdot r_q \cdot [x_q, y_q] \cdot r_{q+1} \\
&\quad - [x_1, r_1 y_1] [x_2, r_2] \cdot y_2 r_3 \cdot [x_3, y_3] \cdot r_4 \cdot [x_4, y_4] \cdot \dots \cdot r_q \cdot [x_q, y_q] \cdot r_{q+1}
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&[x_1, r_1] \cdot y_1 r_2 \cdot [x_2, y_2] \cdot r_3 \cdot [x_3, y_3] \cdot \dots \cdot r_q \cdot [x_q, y_q] \cdot r_{q+1} \\
&= [x_1, r_1] ([x_2, y_1 r_2 y_2] - [x_2, y_1 r_2] y_2) \cdot r_3 \cdot [x_3, y_3] \cdot \dots \cdot r_q \cdot [x_q, y_q] \cdot r_{q+1} \\
&= [x_1, r_1] [x_2, y_1 r_2 y_2] \cdot r_3 \cdot [x_3, y_3] \cdot r_4 \cdot [x_4, y_4] \cdot \dots \cdot r_q \cdot [x_q, y_q] \cdot r_{q+1} \\
&\quad - [x_1, r_1] [x_2, y_1 r_2] \cdot y_2 r_3 \cdot [x_3, y_3] \cdot r_4 \cdot [x_4, y_4] \cdot \dots \cdot r_q \cdot [x_q, y_q] \cdot r_{q+1}.
\end{aligned}$$

Kontynuując powyższą procedurę, przedstawimy x jako sumę elementów postaci

$$\pm [x'_1, y'_1] [x'_2, y'_2] \dots [x'_q, y'_q] r' \quad (3.2.1)$$

dla pewnych $x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, \dots, x'_q, y'_q, r' \in \mathcal{A}$. Elementy te są zerowe, ponieważ $\mathcal{A}$ jest D_q algebrą. Zatem pokazaliśmy, że $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^q = \{0\}$. Zgodnie z definicją, $\mathcal{A}$ nie jest D_{q-1} algebrą. Stąd wynika, że $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^{q-1} \neq \{0\}$, więc q jest indeksem nilpotentności ideału $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$. To kończy dowód. $\square$

Uwaga 3.2.2. Przy dowolnym homomorfizmie algebr, obraz komutatora elementów jest komutatorem elementów obrazu. Zatem jeśli $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ jest izomorfizmem algebr $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$, to $\varphi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$, gdzie przez $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ oraz $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ oznaczamy ideały generowane odpowiednio przez wszystkie komutatory algebr $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Gdy algebra $\mathcal{A}$ zawiera się w $M_n(K)$, to sprzężenie jej dowolną macierzą odwracalną X jest izomorfizmem algebr $\mathcal{A}$ i $X^{-1}\mathcal{A}X$. Otrzymujemy więc równość ideał generowanego przez komutatory algebry $X^{-1}\mathcal{A}X$ oraz ideału $X^{-1}\mathcal{C}_{\mathcal{A}}X$.

W Lemacie 3.2.1 pokazaliśmy, że ideał generowany przez komutatory D_q algebry $\mathcal{A}$ jest nilpotentny indeksu q . Gdy $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$, to ze Stwierdzenia 1.0.20 wynika, że $q \leq n$. Otrzymujemy zatem następujący wniosek.

Wniosek 3.2.3. Jeśli liczby naturalne n i q spełniają nierówność $q > n$, to nie istnieje D_q podalgebra $M_n(K)$.

Stwierdzenie 3.2.4. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną D_q podalgebrą $M_n(K)$. Wtedy istnieją liczby naturalne $n_1, n_2, \dots, n_q$ spełniające równanie $\sum_{i=1}^q n_i = n$ oraz macierz odwracalna X , dla których $\mathcal{A}' = X^{-1}\mathcal{A}X$ zawiera się w pełnej podalgebrze $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Co więcej, dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ algebra $\overline{\mathcal{A}}'_{ii}$ (określona zgodnie z Definicją 3.1.4) jest przemienną podalgebrą $M_{n_i}(K)$.

Dowód. Na mocy Lematu 3.2.1 ideał $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ jest nilpotentny indeksu q . Zatem możemy zastosować Stwierdzenie 1.0.20. Daje nam ono informację, że istnieje macierz odwracalna $X \in M_n(K)$, dla której algebra $\mathcal{A}' = X^{-1}\mathcal{A}X$ zawiera się w pełnej podalgebrze $M_n(K)$

pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Co więcej, macierze należące do ideału $X^{-1}\mathcal{C}_A X$ mają zerowe diagonalne bloki.

Pozostaje pokazać, że algebry $\overline{\mathcal{A}}'_{11}, \overline{\mathcal{A}}'_{22}, \dots, \overline{\mathcal{A}}'_{qq}$ są przemienne. Dla dowolnej liczby $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ oraz dowolnych macierzy $Y_{ii}, Z_{ii} \in \overline{\mathcal{A}}'_{ii}$ z określenia $\overline{\mathcal{A}}'_{ii}$ istnieją macierze blokowe

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1i} & \dots & Y_{1q} \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & Y_{ii} & \dots & Y_{iq} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & Y_{qq} \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1i} & \dots & Z_{1q} \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & Z_{ii} & \dots & Z_{iq} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & Z_{qq} \end{pmatrix}$$

należące do algebry $\mathcal{A}'$. Komutator $[Y, Z]$ ma macierz $[Y_{ii}, Z_{ii}]$ jako i -ty diagonalny blok. Z Uwagi 3.2.2 ideał $X^{-1}\mathcal{C}_A X$ jest równy ideałowi generowanemu przez komutatory $\mathcal{A}'$. Ponieważ macierze należące do $X^{-1}\mathcal{C}_A X$ mają zerowe diagonalne bloki, to $[Y_{ii}, Z_{ii}] = 0_{n_i}$. Z dowolności liczby i oraz macierzy Y_{ii}, Z_{ii} wynika, że algebry $\overline{\mathcal{A}}'_{11}, \overline{\mathcal{A}}'_{22}, \dots, \overline{\mathcal{A}}'_{qq}$ są przemienne. To kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 3.2.5. *Niech $\mathcal{A}$ będzie maksymalną D_q podalgebrą $M_n(K)$. Wtedy istnieje macierz odwracalna X taka, że $X^{-1}\mathcal{A}X$ jest D_q podalgebrą pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu.*

Dowód. Ze Stwierdzenia 3.2.4 istnieje macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ taka, że algebra $\mathcal{A}' = X^{-1}\mathcal{A}X$ zawiera się w pełnej podalgebrze $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Co więcej, dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ algebra $\overline{\mathcal{A}}'_{ii}$ (określona zgodnie z Definicją 3.1.4) jest przemienna. Ponieważ $\mathcal{A}$ jest maksymalną D_q podalgebrą $M_n(K)$, to także $\mathcal{A}'$ jest maksymalną D_q podalgebrą $M_n(K)$. Rozpatrzmy następującą blokową podalgebrę $M_n(K)$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{A}}'_{11} & M_{n_1 \times n_2}(K) & M_{n_1 \times n_3}(K) & \dots & M_{n_1 \times n_q}(K) \\ 0_{n_2 \times n_1} & \overline{\mathcal{A}}'_{22} & M_{n_2 \times n_3}(K) & \dots & M_{n_2 \times n_q}(K) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & M_{n_{q-1} \times n_q}(K) \\ 0_{n_q \times n_1} & \dots & \dots & 0_{n_q \times n_{q-1}} & \overline{\mathcal{A}}'_{qq} \end{pmatrix}.$$

Z definicji algebr $\overline{\mathcal{A}}'_{11}, \overline{\mathcal{A}}'_{22}, \dots, \overline{\mathcal{A}}'_{qq}$ wynika, że $\mathcal{A}'$ zawiera się w $\mathcal{B}$. Ponieważ algebry $\overline{\mathcal{A}}'_{11}, \overline{\mathcal{A}}'_{22}, \dots, \overline{\mathcal{A}}'_{qq}$ są przemienne, to z Uwagi 3.1.6 otrzymujemy, że $\mathcal{B}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$. Zatem z maksymalności podalgebry $\mathcal{A}'$ dostajemy równość $\mathcal{A}' = \mathcal{B}$.

Pokazaliśmy, że $\mathcal{A}'$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ z przemiennymi diagonalnymi blokami. Jeżeli pewien z tych bloków nie jest maksymalną przemienną podalgebrą $M_n(K)$, to rozszerzając go, dostaniemy D_q podalgebrę, która właściwie zawiera

$\mathcal{A}'$. Jest to sprzeczne z maksymalnością algebry $\mathcal{A}'$. Zatem diagonalne bloki algebry $\mathcal{A}'$ są maksymalnymi przemiennymi podalgebrami algebr macierzy odpowiednich rozmiarów. To pokazuje, że $\mathcal{A}'$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu, co kończy dowód. $\square$

Wniosek 3.2.6. Niech $\mathcal{A}$ będzie D_q podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru. Wtedy istnieje macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ taka, że $X^{-1}\mathcal{A}X$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu.

Dowód. Z Twierdzenia 3.2.5 podalgebra $\mathcal{A}$ jest sprzężona z D_q podalgebrą $\mathcal{A}'$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu. Jeśli dla pewnej liczby $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ diagonalny blok $\mathcal{A}'_{ii}$ algebry $\mathcal{A}'$ nie jest przemienną podalgebrą $M_{n_i}(K)$ maksymalnego wymiaru, to możemy go na taką algebrę zamienić i na mocy Uwagi 3.1.6 otrzymać D_q podalgebrę. Ma ona większy wymiar niż $\dim \mathcal{A}'$. Ponieważ wymiary algebr $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ są równe, to otrzymaliśmy sprzeczność z tym, że $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru. Pokazaliśmy więc, że dla każdej liczby $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ diagonalny blok $\mathcal{A}'_{ii}$ algebry $\mathcal{A}'$ jest przemienną podalgebrą $M_{n_i}(K)$ maksymalnego wymiaru. Zatem $\mathcal{A}'$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu. $\square$

W Twierdzeniu 3.2.5 pokazaliśmy, że dowolna maksymalna D_q podalgebra $M_n(K)$ jest sprzężona z D_q podalgebrą $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu. Pokażemy teraz, że dowolna D_q podalgebra $M_n(K)$ I typu jest maksymalną D_q podalgebrą $M_n(K)$.

Twierdzenie 3.2.7. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu. Wtedy $\mathcal{A}$ jest maksymalną D_q podalgebrą $M_n(K)$.

Dowód. Zgodnie z założeniem $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu. W dowodzie wykorzystamy jej przedstawienie w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \cdots & \mathcal{A}_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{qq} \end{pmatrix}, \quad (3.2.2)$$

gdzie $\mathcal{A}_{ii}$ jest maksymalną przemienną podalgebrą $M_{n_i}(K)$ dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, natomiast $\mathcal{A}_{ij} = M_{n_i \times n_j}(K)$ dla $1 \leq i < j \leq q$. Przypuśćmy, nie wprost, że algebra $\mathcal{A}$ nie jest maksymalną D_q podalgebrą $M_n(K)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie D_q podalgebrą $M_n(K)$, która właściwie zawiera $\mathcal{A}$. Zatem istnieje macierz $X \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$. Zapiszmy ją w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{q1} & \cdots & X_{qq} \end{pmatrix}, \quad (3.2.3)$$

gdzie $X_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(K)$ dla $1 \leq i, j \leq q$. Ponieważ macierz X nie należy do algebry $\mathcal{A}$, to z przedstawienia $\mathcal{A}$ w postaci (3.2.2) wynika, że $X_{ii} \notin \mathcal{A}_{ii}$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ lub

istnieją liczby naturalne j, k spełniające nierówności $1 \leq k < j \leq q$, dla których macierz X_{jk} jest niezerowa. Pokażemy, że niezależnie od tego, który z przypadków zachodzi, do ideału $\mathcal{C}_\mathcal{B}$, generowanego przez komutatory algebry $\mathcal{B}$, należy macierz blokowa

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{q1} & \dots & Z_{qq} \end{pmatrix}$$

z dokładnie jednym niezerowym blokiem macierzowym znajdującym się na głównej przekątnej lub poniżej niej. W tym celu rozważmy macierze należące do algebry $\mathcal{A}$

$$E_1 = \sum_{i=1}^{n_1} e_{ii} \quad \text{oraz} \quad E_j = \sum_{i=N_{j-1}+1}^{N_j} e_{ii}$$

dla $j = 2, 3, \dots, q$, gdzie $N_j = n_1 + n_2 + \dots + n_j$.

W przypadku, gdy istnieje indeks $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, dla którego $X_{ii} \notin \mathcal{A}_{ii}$, to pewna macierz $Y_{ii} \in \mathcal{A}_{ii}$ jest nieprzemienne z X_{ii} . W przeciwnym razie możemy utworzyć przemienne podalgebrę właściwie zawierającą $\mathcal{A}_{ii}$, co przeczy jej maksymalności. W rozpatrywanym przypadku za macierz Z możemy przyjąć komutator macierzy

$$E_i X E_i \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & 0_{n_{i-1}} & 0_{n_{i-1} \times n_i} & 0_{n_{i-1} \times n_{i+1}} & \dots \\ \dots & 0_{n_i \times n_{i-1}} & Y_{ii} & 0_{n_i \times n_{i+1}} & \dots \\ \dots & 0_{n_{i+1} \times n_{i-1}} & 0_{n_{i+1} \times n_i} & 0_{n_{i+1}} & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

ponieważ komutator powyższych elementów ma niezerowy jedynie i -ty diagonalny blok równy $[X_{ii}, Y_{ii}]$. Natomiast jeżeli istnieją liczby naturalne j, k spełniające nierówności $1 \leq k < j \leq q$, dla których macierz X_{jk} jest niezerowa, to za macierz Z możemy wziąć $E_j X E_k$. Istotnie, jest to macierz, która w postaci (3.2.3) ma niezerowy jedynie wyraz (j, k) . Co więcej, należy ona do ideału $\mathcal{C}_\mathcal{B}$, ponieważ $E_j X E_k = [E_j X E_k, E_k]$.

Korzystając ze znalezionej macierzy Z , uzyskamy sprzeczności z tym, że $\mathcal{C}_\mathcal{B}$ jest ideałem nilpotentnym, którego indeks nilpotentności jest równy q (patrz Lemat 3.2.1). Niech Z_{rs} dla pewnych liczb r, s spełniających nierówności $1 \leq s \leq r \leq q$ będzie jedynym niezerowym blokiem macierzy Z oraz niech niezerowym wyrazem Z_{rs} będzie z_{ij} dla $1 \leq i \leq n_r$, $1 \leq j \leq n_s$. W macierzy Z wyraz z_{ij} jest na miejscu $(N_{r-1} + i, N_{s-1} + j)$, gdzie jak przy definicji macierzy $E_{N_1}, E_{N_2}, \dots, E_{N_q}$

$$N_{r-1} = n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1}, \quad N_{s-1} = n_1 + n_2 + \dots + n_{s-1},$$

jeśli $2 \leq r, s \leq q$, natomiast gdy $r = 1$ lub $s = 1$, to przyjmujemy, że $N_0 = 0$. Najpierw założymy, że $r \notin \{1, q\}$. Wtedy

$$z_{ij} e_{1,n} = e_{1, N_{r-1}+i} \cdot Z \cdot e_{N_{s-1}+j, n}$$

jest niezerowym elementem. Z Lematu 3.1.7 wynika, że $e_{1,N_{r-1}+i} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^{r-1}$ oraz $e_{N_{s-1}+j,n} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^{q-s}$. Ponieważ algebra $\mathcal{B}$ zawiera algebrę $\mathcal{A}$, to także ideał $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ zawiera ideał $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$. Zatem korzystając dodatkowo z nierówności $r - s \geq 0$ i nilpotentności ideału $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$, otrzymujemy równość

$$z_{ij}e_{1,n} \in \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{r-1} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{q-s} = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{q+(r-s)} = \{0_n\}.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność.

Jeśli $r = 1$, to Z_{11} jest jedynym niezerowym blokiem Z . Wówczas n -ta kolumna macierzy $Z \cdot e_{jn}$ jest równa j -tej kolumnie macierzy Z , która jest niezerowa. Podobnie jak poprzednio z Lematu 3.1.7 wnioskujemy, że $e_{jn} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^{q-1} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{q-1}$, więc $Z \cdot e_{jn} \in \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^q = \{0_n\}$. Kolejny raz uzyskaliśmy sprzeczność.

Gdy $r = q$, to pierwszy wiersz macierzy $e_{1,N_{q-1}+i} \cdot Z$ jest $(N_{q-1} + i)$ -tym wierszem macierzy Z , który jest niezerowy. Podobnie jak w poprzednim przypadku, prowadzi to do sprzeczności. Dowód został zakończony. $\square$

Ponieważ sprzężenia maksymalnej D_q podalgebry $M_n(K)$ są nadal maksymalnymi D_q podalgebrami $M_n(K)$, to z Twierdzenia 3.1.2 oraz Twierdzenia 3.2.5 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.2.8. Algebra $\mathcal{A}$ jest maksymalną D_q podalgebrą $M_n(K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A}$ jest sprzężona z D_q podalgebrą pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu.

3.3 Sprzężenia D_q podalgebr I typu

W tym podrozdziale będziemy szczegółowo analizować sprzężenia blokowo trójkątnych podalgebr $M_n(K)$. Dzięki temu pokażemy, że dwie D_q podalgebry $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebry $M_n(K)$ pewnych kształtów, odpowiednio $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ i $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ I typu, których diagonalne bloki są równe $\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22}, \dots, \mathcal{A}_{qq}$ i $\mathcal{B}_{11}, \mathcal{B}_{22}, \dots, \mathcal{B}_{qq}$, są sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ są równe oraz dla każdego indeksu $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ diagonalne bloki $\mathcal{A}_{ii}$ oraz $\mathcal{B}_{ii}$, będące podalgebrami $M_{n_i}(K)$, są ze sobą sprzężone.

Zacniemy od lematu dotyczącego równań macierzowych. Gdy występujące w nim rozmiary macierzy są równe, wynika on z tego, że algebra macierzy nad ciałem jest algebrą prostą (patrz np. [10, Example 1.10]), więc jest algebrą pierwszą.

Lemat 3.3.1. *Niech r, s, t będą dowolnymi liczbami naturalnymi. Niech Y będzie macierzą należącą do $M_{r \times t}(K)$, a W niech będzie macierzą niezerową, należącą do $M_{s \times t}(K)$. Załóżmy, że dla każdej macierzy $Z \in M_{t \times s}(K)$ iloczyn YZW jest zerowy. Wtedy macierz Y jest zerowa.*

Dowód. Zapiszmy macierze Y, W spełniające założenia lematu następująco

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{r1} & \cdots & y_{rt} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{s1} & \cdots & w_{st} \end{pmatrix}.$$

Skoro W jest macierzą niezerową, to istnieją indeksy $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ takie, że $w_{ij} \neq 0$. Dla dowolnego $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ macierz $e_{ki} \in M_{t \times s}(K)$. Zatem na mocy założenia $Y e_{ki} W = 0_{r \times t}$. Z drugiej strony

$$Y e_{ki} W = \begin{pmatrix} y_{1k} w_{i1} & \cdots & y_{1k} w_{ij} & \cdots & y_{1k} w_{it} \\ y_{2k} w_{i1} & \cdots & y_{2k} w_{ij} & \cdots & y_{2k} w_{it} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{rk} w_{i1} & \cdots & y_{rk} w_{ij} & \cdots & y_{rk} w_{it} \end{pmatrix}, \quad (3.3.1)$$

więc

$$y_{1k} w_{ij} = y_{2k} w_{ij} = \cdots = y_{rk} w_{ij} = 0.$$

Ponieważ $w_{ij} \neq 0$, to z ostatniej równości wynika, że

$$y_{1k} = y_{2k} = \cdots = y_{rk} = 0.$$

Pokazaliśmy, że k -ta kolumna macierzy Y jest zerowa. Macierz Y ma t kolumn, zatem z dowolności liczby $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ wynika, że Y jest macierzą zerową. To kończy dowód. $\square$

Lemat 3.3.2. Niech q oraz n będą liczbami naturalnymi takimi, że $2 \leq q \leq n$. Niech $X \in M_n(K)$ będzie macierzą odwracalną, która jest w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & X_{qq} \end{pmatrix}$$

dla pewnych $X_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(K)$, gdzie $1 \leq i \leq j \leq q$, natomiast $n_1, n_2, \dots, n_q$ są liczbami naturalnymi spełniającymi równość $\sum_{i=1}^q n_i = n$. Wtedy macierze $X_{11}, X_{22}, \dots, X_{qq}$ są odwracalne oraz istnieją macierze $X'_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(K)$ dla $1 \leq i < j \leq q$ takie, że

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11}^{-1} & X'_{12} & \cdots & X'_{1q} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & X_{q-1,q-1}^{-1} & X'_{q-1,q} \\ & & & X_{qq}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na q . Dla $q = 2$ macierz X jest w postaci blokowej $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0_{n_2 \times n_1} & X_{22} \end{pmatrix}$. Wtedy $\det X = \det X_{11} \cdot \det X_{22}$ (patrz [7, Przykład 6.7] oraz [7, Twierdzenie 6.8]). Z tej formuły wynika, że jeśli macierz X jest odwracalna, to macierze X_{11} i X_{22} są także odwracalne. Zatem

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11}^{-1} & -X_{11}^{-1} X_{12} X_{22}^{-1} \\ 0_{n_2 \times n_1} & X_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Pokazaliśmy lemat dla $q = 2$, bo za macierz X'_{12} możemy przyjąć macierz $-X_{11}^{-1}X_{12}X_{22}^{-1}$.

Założmy, że lemat jest prawdziwy dla pewnej liczby naturalnej $q \geq 2$ oraz dowolnego n . Sprawdźmy, że jest on także spełniony dla $q + 1$. Weźmy dowolną macierz odwracalną

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1,q+1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & X_{q+1,q+1} \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

dla pewnych $X_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(K)$, gdzie $1 \leq i \leq j \leq q + 1$, a $n_1, n_2, \dots, n_{q+1}$ są liczbami naturalnymi spełniającymi równość $\sum_{i=1}^{q+1} n_i = n$. Aby skorzystać z założenia indukcyjnego, określmy macierze blokowe

$$\begin{aligned} \bar{X}_{12} &= \begin{pmatrix} X_{12} & X_{13} & \cdots & X_{1,q+1} \end{pmatrix} \in M_{n_1 \times (n-n_1)}(K), \\ \bar{X}_{22} &= \begin{pmatrix} X_{22} & \cdots & X_{2,q+1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & X_{q+1,q+1} \end{pmatrix} \in M_{n-n_1}(K). \end{aligned}$$

Zapiszmy X w postaci $\begin{pmatrix} X_{11} & \bar{X}_{12} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & \bar{X}_{22} \end{pmatrix}$. Wtedy na mocy udowodnionej już części lematu macierze X_{11} i $\bar{X}_{22}$ są odwracalne oraz istnieje macierz $\bar{X}'_{12} \in M_{n_1 \times (n-n_1)}(K)$ taka, że

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11}^{-1} & \bar{X}'_{12} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & \bar{X}_{22}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.3.2)$$

Z założenia indukcyjnego zastosowanego do macierzy $\bar{X}_{22} \in M_{n-n_1}(K)$ macierze $X_{22}, X_{33}, \dots, X_{q+1,q+1}$ są odwracalne oraz istnieją macierze $X'_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(K)$ dla $2 \leq i < j \leq q + 1$ takie, że

$$\bar{X}_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} X_{22}^{-1} & X'_{23} & \cdots & X'_{2,q+1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & X_{qq}^{-1} & X'_{q,q+1} \\ & & & X_{q+1,q+1}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.3.3)$$

Jeśli zapiszemy macierz $\bar{X}_{12} \in M_{n_1 \times (n-n_1)}(K)$ w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} X'_{12} & X'_{13} & \cdots & X'_{1,q+1} \end{pmatrix},$$

gdzie $X'_{1j} \in M_{n_1 \times n_j}(K)$ dla $2 \leq j \leq q + 1$, to z formuł (3.3.2) oraz (3.3.3) wynika, że lemat jest prawdziwy dla $q + 1$. To kończy dowód. $\square$

Lemat 3.3.3. *Niech q oraz n będą liczbami naturalnymi takimi, że $2 \leq q \leq n$. Niech $n_1, n_2, \dots, n_q$ będą liczbami naturalnymi spełniającymi równość $\sum_{i=1}^q n_i = n$. Rozpatrzmy*

algebrę $\mathcal{A}$ zawartą w pełnej podalgebrze $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$, dla której

$$\begin{pmatrix} 0_{n_1} & M_{n_1 \times n_2}(K) & M_{n_1 \times n_3}(K) & \cdots & M_{n_1 \times n_q}(K) \\ & 0_{n_2} & M_{n_2 \times n_3}(K) & \cdots & M_{n_2 \times n_q}(K) \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0_{n_{q-1}} & M_{n_{q-1} \times n_q}(K) \\ & & & & 0_{n_q} \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{A}.$$

Wówczas, jeśli $X \in M_n(K)$ jest macierzą odwracalną taką, że algebra $X^{-1}\mathcal{A}X$ zawiera się w pełnej podalgebrze $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$, to macierz X należy do pełnej podalgebry $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$.

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na q . Dla $q = 2$ i dowolnych liczb naturalnych n, n_1, n_2 takich, że $2 \leq n$ oraz $n_1 + n_2 = n$ zapiszmy macierz X wraz z jej odwrotnością w postaciach blokowych

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} X'_{11} & X'_{12} \\ X'_{21} & X'_{22} \end{pmatrix},$$

gdzie $X_{ij}, X'_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(K)$ dla $1 \leq i, j \leq 2$. Mamy pokazać, że X_{21} jest macierzą zerową. Przypuśćmy przeciwnie. Niech $Y \in M_{n_1 \times n_2}(K)$ będzie dowolną macierzą. Z założenia wynika, że $\begin{pmatrix} 0_{n_1} & Y \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$. Korzystając dodatkowo z tego, że algebra $X^{-1}\mathcal{A}X$ zawiera się w pełnej podalgebrze $M_n(K)$ kształtu (n_1, n_2) , otrzymujemy

$$\begin{aligned} X^{-1} \begin{pmatrix} 0_{n_1} & Y \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} X'_{11} & X'_{12} \\ X'_{21} & X'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n_1} & Y \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X'_{11}YX_{21} & X'_{11}YX_{22} \\ X'_{21}YX_{21} & X'_{21}YX_{22} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} M_{n_1}(K) & M_{n_1 \times n_2}(K) \\ 0_{n_2 \times n_1} & M_{n_2}(K) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zatem $X'_{21}YX_{21} = 0_{n_2 \times n_1}$. Macierze X'_{21} , Y , X_{21} spełniają więc założenia Lematu 3.3.1. Wynika z niego, że $X'_{21} = 0_{n_2 \times n_1}$. To znaczy, że X^{-1} jest macierzą blokowo trójkątną. Na mocy Lematu 3.3.2 także odwrotność macierzy X^{-1} jest blokowo trójkątna, więc $X_{21} = 0_{n_2 \times n_1}$. Uzyskana sprzeczność pokazuje, że lemat jest prawdziwy dla $q = 2$.

Założmy teraz, że lemat jest spełniony dla pewnej liczby $q \geq 2$ i dowolnych liczb naturalnych $n, n_1, n_2, \dots, n_q$ takich, że $\sum_{i=1}^q n_i = n$. Pokażemy, że lemat jest prawdziwy dla liczby $q + 1$. Zapiszmy macierze X i X^{-1} w postaciach blokowych

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1,q+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{q+1,1} & \cdots & X_{q+1,q+1} \end{pmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} X'_{11} & \cdots & X'_{1,q+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X'_{q+1,1} & \cdots & X'_{q+1,q+1} \end{pmatrix},$$

gdzie $X_{ij}, X'_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(K)$ dla $1 \leq i, j \leq q+1$.

Aby sprawdzić, że macierz X jest blokowo trójkątna, zaczniemy od udowodnienia, że macierze $X_{21}, X_{31}, \dots, X_{q+1,1}$ są zerowe. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje indeks $k \in \{2, 3, \dots, q+1\}$, dla którego $X_{k1} \neq 0_{n_k \times n_1}$. Niech $Y_{1k} \in M_{n_1 \times n_k}(K)$ będzie dowolną macierzą. Wtedy

$$\begin{pmatrix} 0_{n_1} & \dots & 0_{n_1 \times n_{k-1}} & Y_{1k} & 0_{n_1 \times n_{k+1}} & \dots & 0_{n_1 \times n_{q+1}} \\ 0_{n_2 \times n_1} & \dots & 0_{n_2 \times n_{k-1}} & 0_{n_2 \times n_k} & 0_{n_2 \times n_{k+1}} & \dots & 0_{n_2 \times n_{q+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n_{q+1} \times n_1} & \dots & 0_{n_{q+1} \times n_{k-1}} & 0_{n_{q+1} \times n_k} & 0_{n_{q+1} \times n_{k+1}} & \dots & 0_{n_{q+1}} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$$

i iloczyn macierzy

$$X^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0_{n_1} & \dots & 0_{n_1 \times n_{k-1}} & Y_{1k} & 0_{n_1 \times n_{k+1}} & \dots & 0_{n_1 \times n_{q+1}} \\ 0_{n_2 \times n_1} & \dots & 0_{n_2 \times n_{k-1}} & 0_{n_2 \times n_k} & 0_{n_2 \times n_{k+1}} & \dots & 0_{n_2 \times n_{q+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n_{q+1} \times n_1} & \dots & 0_{n_{q+1} \times n_{k-1}} & 0_{n_{q+1} \times n_k} & 0_{n_{q+1} \times n_{k+1}} & \dots & 0_{n_{q+1}} \end{pmatrix} \cdot X$$

jest równy

$$\begin{pmatrix} X'_{11}Y_{1k}X_{k1} & X'_{11}Y_{1k}X_{k2} & \dots & X'_{11}Y_{1k}X_{k,q+1} \\ X'_{21}Y_{1k}X_{k1} & X'_{21}Y_{1k}X_{k2} & \dots & X'_{21}Y_{1k}X_{k,q+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X'_{q+1,1}Y_{1k}X_{k1} & X'_{q+1,1}Y_{1k}X_{k2} & \dots & X'_{q+1,1}Y_{1k}X_{k,q+1} \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $X^{-1}\mathcal{A}X$ zawiera się w pełnej D_q podalgebrze $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{q+1})$, to

$$X'_{21}Y_{1k}X_{k1} = 0_{n_2 \times n_1}, \quad X'_{31}Y_{1k}X_{k1} = 0_{n_3 \times n_1}, \quad \dots, \quad X'_{q+1,1}Y_{1k}X_{k1} = 0_{n_{q+1} \times n_1}.$$

Każda z trójek macierzy $(X'_{21}, Y_{1k}, X_{k1}), (X'_{31}, Y_{1k}, X_{k1}), \dots, (X'_{q+1,1}, Y_{1k}, X_{k1})$ spełnia założenia Lematu 3.3.1. Zatem macierze $X'_{21}, X'_{31}, \dots, X'_{q+1,1}$ są zerowe.

Zapiszmy teraz macierz X^{-1} w postaci blokowo trójkątnej $\begin{pmatrix} X'_{11} & \overline{X'}_{12} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & \overline{X'}_{22} \end{pmatrix}$, gdzie

$$\overline{X'}_{12} = \begin{pmatrix} X'_{12} & X'_{13} & \dots & X'_{1,q+1} \end{pmatrix}, \quad \overline{X'}_{22} = \begin{pmatrix} X'_{22} & \dots & X'_{2,q+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X'_{q+1,2} & \dots & X'_{q+1,q+1} \end{pmatrix}. \quad (3.3.4)$$

Z Lematu 3.3.2 zastosowanego do macierzy X^{-1} w opisanej przed chwilą postaci wynika, że macierze $X_{21}, X_{31}, \dots, X_{q+1,1}$ są zerowe, sprzeczność. To pokazuje, że rzeczywiście $X_{21}, X_{31}, \dots, X_{q+1,1}$ są macierzami zerowymi.

Aby zakończyć dowód, określmy następujący podzbiór macierzy blokowo trójkątnych:

$$\mathcal{A}_{22} = \left\{ \begin{pmatrix} A_{22} & \dots & A_{2,q+1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_{q+1,q+1} \end{pmatrix} \in M_{(n-n_1)}(K) : \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,q+1} \\ & A_{22} & \dots & A_{2,q+1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{q+1,q+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \right\},$$

gdzie $A_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(K)$ dla $1 \leq i \leq j \leq q+1$. Tak zdefiniowany zbiór $\mathcal{A}_{22}$ jest podalgebrą $M_{n-n_1}(K)$. Utworzyliśmy go z wyrazów macierzy należących do algebry $\mathcal{A}$, znajdujących się na miejscach (i, j) , dla których spełnione są nierówności $n_1 + 1 \leq i, j \leq n$. Zapiszmy macierz X w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} X_{11} & \bar{X}_{12} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & \bar{X}_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.3.5)$$

gdzie macierze $\bar{X}_{12}$ i $\bar{X}_{22}$ określamy analogicznie jak macierze $\bar{X}'_{12}$ i $\bar{X}'_{22}$ we wzorze (3.3.4). Z definicji podalgebry $\mathcal{A}_{22}$ oraz z Lematu 3.3.2 wynika, że możemy zastosować założenie indukcyjne do $\mathcal{A}_{22}$ i macierzy $\bar{X}_{22}$, dla których $\bar{X}_{22}^{-1} \mathcal{A}_{22} \bar{X}_{22}$ zawiera się w pełnej podalgebrze $M_{n-n_1}(K)$ kształtu $(n_2, n_3, \dots, n_{q+1})$. Zatem otrzymujemy, że macierz $\bar{X}_{22}$ należy do pełnej podalgebry $M_{n-n_1}(K)$ kształtu $(n_2, n_3, \dots, n_{q+1})$. To razem z przedstawieniem macierzy X w postaci (3.3.5) kończy dowód. $\square$

Pokażemy teraz, że nie każde sprzężenie D_q podalgebry $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu jest nadal D_q podalgebrą $M_n(K)$ tego samego kształtu I typu.

Przykład 3.3.4. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną D_4 podalgebrą $M_n(K)$ kształtu (n_1, n_2, n_3, n_4) I typu i niech X będzie macierzą $M_n(K)$ w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} 0_{n_1 \times n_4} & 0_{n_1 \times n_2} & 0_{n_1 \times n_3} & I_{n_1} \\ 0_{n_2 \times n_4} & I_{n_2} & 0_{n_2 \times n_3} & 0_{n_2 \times n_1} \\ 0_{n_3 \times n_4} & 0_{n_3 \times n_2} & I_{n_3} & 0_{n_3 \times n_1} \\ I_{n_4} & 0_{n_4 \times n_2} & 0_{n_4 \times n_3} & 0_{n_4 \times n_1} \end{pmatrix}.$$

Odwrotnością macierzy X jest

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 0_{n_4 \times n_1} & 0_{n_4 \times n_2} & 0_{n_4 \times n_3} & I_{n_4} \\ 0_{n_2 \times n_1} & I_{n_2} & 0_{n_2 \times n_3} & 0_{n_2 \times n_4} \\ 0_{n_3 \times n_1} & 0_{n_3 \times n_2} & I_{n_3} & 0_{n_3 \times n_4} \\ I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} & 0_{n_1 \times n_3} & 0_{n_1 \times n_4} \end{pmatrix}.$$

Macierze X oraz X^{-1} są blokowym odpowiednikiem macierzy permutacji $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

która po pomnożeniu z prawej strony przez dowolną macierz $A \in M_4(K)$ zamienia ze sobą pierwszy oraz ostatni wiersz macierzy A , natomiast po pomnożeniu z lewej strony przez macierz A zamienia pierwszą oraz ostatnią kolumnę macierzy A . Zatem, jeśli zapiszemy algebrę $\mathcal{A}$ w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} & \mathcal{A}_{14} \\ & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} & \mathcal{A}_{24} \\ & & \mathcal{A}_{33} & \mathcal{A}_{34} \\ & & & \mathcal{A}_{44} \end{pmatrix},$$

to

$$X^{-1}\mathcal{A}X = \begin{pmatrix} 0_{n_4 \times n_1} & 0_{n_4 \times n_2} & 0_{n_4 \times n_3} & \mathcal{A}_{44} \\ 0_{n_2 \times n_1} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} & \mathcal{A}_{24} \\ 0_{n_3 \times n_1} & 0_{n_3 \times n_2} & \mathcal{A}_{33} & \mathcal{A}_{34} \\ \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} & \mathcal{A}_{14} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{44} & 0_{n_4 \times n_2} & 0_{n_4 \times n_3} & 0_{n_4 \times n_1} \\ \mathcal{A}_{24} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} & 0_{n_2 \times n_1} \\ \mathcal{A}_{34} & 0_{n_3 \times n_2} & \mathcal{A}_{33} & 0_{n_3 \times n_1} \\ \mathcal{A}_{14} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} & \mathcal{A}_{11} \end{pmatrix}.$$

Podalgebra $X^{-1}\mathcal{A}X$ nie jest D_4 podalgebrą $M_n(K)$ kształtu (n_1, n_2, n_3, n_4) I typu.

Stwierdzenie 3.3.5. *Niech $\mathcal{A}$ będzie D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu oraz niech $X \in M_n(K)$ będzie macierzą odwracalną, dla której algebra $X^{-1}\mathcal{A}X$ zawiera się w pełnej podalgebrze $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Wtedy $X^{-1}\mathcal{A}X$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu. Co więcej, jeśli $\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22}, \dots, \mathcal{A}_{qq}$ oraz $\mathcal{A}'_{11}, \mathcal{A}'_{22}, \dots, \mathcal{A}'_{qq}$ są diagonalnymi blokami odpowiednio algebr $\mathcal{A}$ oraz $X^{-1}\mathcal{A}X$, to dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ bloki $\mathcal{A}_{ii}$ oraz $\mathcal{A}'_{ii}$, będące podalgebrami $M_{n_i}(K)$, są sprzężone.*

Dowód. Z Lematu 3.3.3 wynika, że macierz X jest blokowo trójkątna. Możemy zapisać

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & X_{qq} \end{pmatrix}$$

dla pewnych $X_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(K)$, gdzie $1 \leq i \leq j \leq q$. Na mocy Lematu 3.3.2 macierze $X_{11}, X_{22}, \dots, X_{qq}$ są odwracalne oraz istnieją macierze $X'_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(K)$ dla $1 \leq i < j \leq q$ takie, że

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11}^{-1} & X'_{12} & \dots & X'_{1q} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & X_{q-1,q-1}^{-1} & X'_{q-1,q} \\ & & & X_{qq}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Pokażemy, że $X^{-1}\mathcal{A}X$ jest równa algebrze $\mathcal{A}'$, która jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu z diagonalnymi blokami równymi $X_{11}^{-1}\mathcal{A}_{11}X_{11}, X_{22}^{-1}\mathcal{A}_{22}X_{22}, \dots, X_{qq}^{-1}\mathcal{A}_{qq}X_{qq}$. Istotnie, z blokowej postaci macierzy X, X^{-1} i algebry $\mathcal{A}$ wynika, że $X^{-1}\mathcal{A}X$ jest podalgebrą pełnej podalgebry $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ z diagonalnymi blokami równymi $X_{11}^{-1}\mathcal{A}_{11}X_{11}, X_{22}^{-1}\mathcal{A}_{22}X_{22}, \dots, X_{qq}^{-1}\mathcal{A}_{qq}X_{qq}$. Stąd wynika zawieranie $X^{-1}\mathcal{A}X \subseteq \mathcal{A}'$. Ponieważ

$$\dim X_{11}^{-1}\mathcal{A}_{11}X_{11} = \dim \mathcal{A}_{11}, \dim X_{22}^{-1}\mathcal{A}_{22}X_{22} = \dim \mathcal{A}_{22}, \dots, \dim X_{qq}^{-1}\mathcal{A}_{qq}X_{qq} = \dim \mathcal{A}_{qq},$$

więc diagonalne bloki algebr $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ mają równe wymiary. Poza diagonalnymi blokami mają one bloki pełnych macierzy tych samych rozmiarów, zatem otrzymujemy równości $\dim X^{-1}\mathcal{A}X = \dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}'$. Z zawierania między algebrami $X^{-1}\mathcal{A}X$ i $\mathcal{A}'$ oraz z równości ich wymiarów wynika, że $X^{-1}\mathcal{A}X = \mathcal{A}'$. To kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 3.3.6. *Niech $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ będą D_q podalgebrami $M_n(K)$ I typu kształtów $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$. Oznaczmy przez $\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22}, \dots, \mathcal{A}_{qq}$ i $\mathcal{B}_{11}, \mathcal{B}_{22}, \dots, \mathcal{B}_{qq}$*

ich diagonalne bloki. Podalgebry $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ liczby n_j oraz ℓ_j są równe i bloki $\mathcal{A}_{jj}$ oraz $\mathcal{B}_{jj}$, będące podalgebrami $M_{n_j}(K)$, są sprzężone.

Dowód. Najpierw założymy, że $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są D_q podalgebrami $M_n(K)$ tego samego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu, których diagonalne bloki $\mathcal{A}_{jj}$ oraz $\mathcal{B}_{jj}$ są sprzężone dla dowolnego $j \in \{1, 2, \dots, q\}$. Wtedy dla każdego j istnieje macierz odwracalna $X_{jj} \in M_{n_j}(K)$ taka, że $X_{jj}^{-1} \mathcal{A}_{jj} X_{jj} = \mathcal{B}_{jj}$. Udowodnimy, że podalgebra $\mathcal{B}$ jest równa podalgebrze

$$\begin{pmatrix} X_{11}^{-1} & 0_{n_1 \times n_2} & \dots & 0_{n_1 \times n_q} \\ 0_{n_2 \times n_1} & X_{22}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{n_{q-1} \times n_q} \\ 0_{n_q \times n_1} & \dots & 0_{n_q \times n_{q-1}} & X_{qq}^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} X_{11} & 0_{n_1 \times n_2} & \dots & 0_{n_1 \times n_q} \\ 0_{n_2 \times n_1} & X_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{n_{q-1} \times n_q} \\ 0_{n_q \times n_1} & \dots & 0_{n_q \times n_{q-1}} & X_{qq} \end{pmatrix}. \quad (3.3.6)$$

Stąd będzie wynikało, że podalgebry $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są sprzężone, co pokaże jedną z implikacji.

Ponieważ algebra $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$, to podalgebra określona formułą (3.3.6) zawiera się w pełnej podalgebrze $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Zatem ze Stwierdzenia 3.3.5 jest ona D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu. Kolejnymi diagonalnymi blokami tej podalgebry są $X_{11}^{-1} \mathcal{A}_{11} X_{11}$, $X_{22}^{-1} \mathcal{A}_{22} X_{22}$, $\dots$, $X_{qq}^{-1} \mathcal{A}_{qq} X_{qq}$. Również $\mathcal{B}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu z tymi samymi diagonalnymi blokami. Wykazaliśmy więc, że podalgebra $\mathcal{B}$ jest równa podalgebrze określonej wzorem (3.3.6).

Pokażemy przeciwną implikację. Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą D_q podalgebrami $M_n(K)$ I typu, odpowiednio kształtów $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ i $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$, które są sprzężone. Wystarczy udowodnić, że ich kształty są takie same. Wtedy odpowiednie diagonalne bloki są ze sobą sprzężone na mocy Stwierdzenia 3.3.5. Rozpatrzmy następujące podprzestrzenie $V = K^n$, które są związane z ideałem generowanym przez komutatory algebry $\mathcal{A}$ oraz ideałem generowanym przez komutatory algebry $\mathcal{B}$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}} V, \quad \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^2 V, \quad \dots, \quad \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^{q-1} V, \quad \mathcal{C}_{\mathcal{B}} V, \quad \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 V, \quad \dots, \quad \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{q-1} V.$$

Sprawdźmy, że ich wymiary wyznaczają ciągi $(n_1, n_2, \dots, n_q)$, $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$. Z Lematu 3.1.7 wynika, że dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_i = \dim \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^{q-i} V.$$

Dodatkowo $\dim \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^q V = 0$, ponieważ ideał $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ w dowolnej D_q algebrze jest ideałem nilpotentnym indeksu nilpotentności q oraz $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$, ponieważ ciąg $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ wyznacza kształt podalgebry $M_n(K)$. Zatem otrzymujemy, że

$$n_i = \begin{cases} \dim \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^{q-i} V - \dim \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^{q-i+1} V, & \text{jeśli } i = 1, 2, \dots, q-1, \\ n - \dim \mathcal{C}_{\mathcal{A}} V, & \text{jeśli } i = q. \end{cases}$$

Analogicznie

$$\ell_i = \begin{cases} \dim \mathcal{C}_B^{q-i}V - \dim \mathcal{C}_B^{q-i+1}V, & \text{jeśli } i = 1, 2, \dots, q-1, \\ n - \dim \mathcal{C}_B V, & \text{jeśli } i = q. \end{cases}$$

Aby zakończyć dowód pokażemy, że dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ przestrzenie $\mathcal{C}_A^i V$ oraz $\mathcal{C}_B^i V$ mają równe wymiary. Skoro algebry $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są sprzężone, to istnieje macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ taka, że $X^{-1}\mathcal{A}X = \mathcal{B}$. Z Uwagi 3.2.2 ideał $\mathcal{C}_B$ jest równy $X^{-1}\mathcal{C}_A X$, więc

$$\mathcal{C}_B^i = (X^{-1}\mathcal{C}_A X)^i = X^{-1}\mathcal{C}_A^i X.$$

Niech $(C_1 v_1, C_2 v_2, \dots, C_k v_k)$, gdzie k jest pewną liczbą naturalną, $C_1, C_2, \dots, C_k \in \mathcal{C}_A^i$ oraz $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$, będzie bazą przestrzeni $\mathcal{C}_A^i V$. Z liniowej niezależności wektorów $C_1 v_1, C_2 v_2, \dots, C_k v_k$ wynika, że wektory

$$X^{-1}C_j v_j = (X^{-1}C_j X)X^{-1}v_j \in (X^{-1}\mathcal{C}_A^i X)V$$

dla $j = 1, 2, \dots, k$ są liniowo niezależne. Stąd $\dim \mathcal{C}_A^i V \leq \dim (X^{-1}\mathcal{C}_A^i X)V$. W podobny sposób uzasadniamy nierówność $\dim (X^{-1}\mathcal{C}_A^i X)V \leq \dim \mathcal{C}_A^i V$. Udowodniliśmy, że wymiary przestrzeni $\mathcal{C}_A^i V$ oraz $(X^{-1}\mathcal{C}_A^i X)V$ są równe, co kończy dowód drugiej implikacji. $\square$

3.4 O izomorfizmach D_q podalgebr II typu i izomorfizmach pełnych podalgebr blokowo trójkątnych

W tym podrozdziale ustalimy, kiedy D_q podalgebry $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ algebry $M_n(K)$ II typu są izomorficzne. Pokażemy również, jak w prosty sposób wykorzystać zastosowane przez nas argumenty do rozwiązywania problemu izomorfizmu pełnych blokowo trójkątnych podalgebr $M_n(K)$. Drugie ze wspomnianych zagadnień było, w ogólniejszych sytuacjach, rozważane na przykład w [9, Theorem 1] lub [13, Corollary 2.6].

Zgodnie z Definicją 3.1.2 oraz Definicją 3.1.8 będziemy zakładać, że algebry $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są w postaciach blokowo trójkątnych

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{qq} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{qq} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \dots & \mathcal{B}_{qq} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{B}_{qq} \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{A}_{ij} = M_{n_i \times n_j}(K)$ oraz $\mathcal{B}_{ij} = M_{\ell_i \times \ell_j}(K)$ dla $1 \leq i < j \leq q$, natomiast diagonalne bloki w powyższych przedstawieniach spełniają następujące warunki:

- jeśli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są pełnymi podalgebrami $M_n(K)$ odpowiednio kształtów $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$, to dla dowolnej liczby $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ blok $\mathcal{A}_{ii} = M_{n_i}(K)$ oraz blok $\mathcal{B}_{ii} = M_{\ell_i}(K)$,

- jeśli $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są D_q podalgebrami $M_n(K)$ odpowiednio kształtów $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ II typu, to dla dowolnej liczby naturalnej $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ bloki $\mathcal{A}_{ii}$ oraz $\mathcal{B}_{ii}$ są przemiennymi podalgebrami maksymalnych wymiarów odpowiednio algebr $M_{n_i}(K)$ oraz $M_{\ell_i}(K)$.

Podobnie jak powyżej nie będziemy zaznaczać zerowych wyrazów w przypadku, kiedy rozpatrujemy podzbiory algebr $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$. Na przykład, jeśli $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, to przyjmujemy następujące oznaczenia

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline \end{array} \right) := \begin{pmatrix} 0_{n_1} & \cdots & 0_{n_1 \times n_{i-1}} & 0_{n_1 \times n_i} & 0_{n_1 \times n_{i+1}} & \cdots & 0_{n_1 \times n_q} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0_{n_{i-1}} & 0_{n_{i-1} \times n_i} & 0_{n_{i-1} \times n_{i+1}} & \cdots & 0_{n_{i-1} \times n_q} \\ & & & \mathcal{A}_{ii} & 0_{n_i \times n_{i+1}} & \cdots & 0_{n_i \times n_q} \\ & & & & 0_{n_{i+1}} & \cdots & 0_{n_{i+1} \times n_q} \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0_{n_q} \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & \mathcal{B}_{1i} & \cdots & \mathcal{B}_{1q} & & & \\ \hline & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ \hline & \mathcal{B}_{ii} & \cdots & \mathcal{B}_{iq} & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline \end{array} \right) := \begin{pmatrix} 0_{n_1} & \cdots & 0_{n_1 \times n_{i-1}} & \mathcal{B}_{1i} & \mathcal{B}_{1,i+1} & \cdots & \mathcal{B}_{1q} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0_{n_{i-1}} & \mathcal{B}_{i-1,i} & \mathcal{B}_{i-1,i+1} & \cdots & \mathcal{B}_{i-1,q} \\ & & & \mathcal{B}_{ii} & \mathcal{B}_{i,i+1} & \cdots & \mathcal{B}_{i,q} \\ & & & & 0_{n_{i+1}} & \cdots & 0_{n_{i+1} \times n_q} \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0_{n_q} \end{pmatrix}.$$

Zgodnie z Definicją 1.0.17 symbolami $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ oraz $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ będziemy oznaczali ideały generowane przez wszystkie komutatory odpowiednio algebr $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$.

W rozważaniach dotyczących izomorfizmu D_q podalgebr $M_n(K)$ II typu zastosujemy Stwierdzenie 3.1.7. Natomiast aby rozwiązać problem izomorfizmu pełnych podalgebr $M_n(K)$ typu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$, oprzemy się na następującej charakteryzacji potęg radykału Jacobsona takich podalgebr.

Stwierdzenie 3.4.1. *Niech $\mathcal{A}$ będzie pełną podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$.*

Wtedy dla każdej liczby naturalnej $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ ideał $J(\mathcal{A})^i$ jest równy

$$\begin{pmatrix} 0_{n_1} & \dots & 0_{n_1 \times n_i} & M_{n_1 \times n_{i+1}}(K) & \dots & M_{n_1 \times n_q}(K) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & M_{n_{q-i} \times n_q}(K) \\ & & & \ddots & \ddots & 0_{n_{q-i+1} \times n_q} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0_{n_q} \end{pmatrix}. \quad (3.4.1)$$

Dowód. Pokażemy, że powyższy wzór jest prawdziwy dla $i = 1$. Wtedy postać $J(\mathcal{A})^i$ dla dowolnej liczby $i \in \{2, 3, \dots, q\}$ wynika z formuły na mnożenie macierzy blokowych. Ponieważ w skończonej wymiarowej algebrze radykał Jacobsona $J(\mathcal{A})$ jest maksymalnym ideałem nilpotentnym, to zbiór

$$\begin{pmatrix} 0_{n_1} & M_{n_1 \times n_2}(K) & M_{n_1 \times n_3}(K) & \dots & M_{n_1 \times n_q}(K) \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} & M_{n_2 \times n_3}(K) & \dots & M_{n_2 \times n_q}(K) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & M_{n_{q-1} \times n_q}(K) \\ 0_{n_q \times n_1} & \dots & \dots & 0_{n_q \times n_{q-1}} & 0_{n_q} \end{pmatrix} \quad (3.4.2)$$

zawiera się w $J(\mathcal{A})$. Pokażemy, że przeciwne zawieranie jest też prawdziwe. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje macierz $A \in J(\mathcal{A})$, która nie jest elementem zbioru opisanego formułą (3.4.2). Zapiszmy ją w postaci blokowo trójkątnej.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_{qq} \end{pmatrix},$$

gdzie $A_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(K)$ dla $1 \leq i \leq j \leq q$. Z udowodnionego zawierania wynika, że do ideału $J(\mathcal{A})$ należy również macierz

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & 0_{n_1 \times n_2} & \dots & 0_{n_1 \times n_q} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & A_{q-1, q-1} & 0_{n_{q-1} \times n_q} \\ & & & A_{qq} \end{pmatrix}.$$

Ponieważ macierz A nie należy do zbioru opisanego formułą (3.4.2), to dla pewnej liczby $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ macierz A_{jj} jest niezerowa. Niech $a_{k\ell}$ będzie jej niezerowym wyrazem. Rozpatrzmy macierz E będącą iloczynem

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0_{n_{j-1}} & 0_{n_{j-1} \times n_j} & 0_{n_{j-1} \times n_{j+1}} & \cdots & \vdots \\ & & e_{1k} & 0_{n_j \times n_{j+1}} & \cdots & \vdots \\ & & & 0_{n_{j+1}} & \cdots & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \cdot A' \cdot \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0_{n_{j-1}} & 0_{n_{j-1} \times n_j} & 0_{n_{j-1} \times n_{j+1}} & \cdots & \vdots \\ & & e_{\ell 1} & 0_{n_j \times n_{j+1}} & \cdots & \vdots \\ & & & 0_{n_{j+1}} & \cdots & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0_{n_{j-1}} & 0_{n_{j-1} \times n_j} & 0_{n_{j-1} \times n_{j+1}} & \cdots & \vdots \\ & & a_{k\ell} e_{11} & 0_{n_j \times n_{j+1}} & \cdots & \vdots \\ & & & 0_{n_{j+1}} & \cdots & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

gdzie $e_{11}, e_{1k}, e_{\ell 1}$ są jedynekami macierzowymi algebry $M_{n_j}(K)$. Macierz E należy do $J(\mathcal{A})$, ponieważ radykał Jacobsona jest ideałem. Co więcej, spełnia ona równość $E^2 = a_{k\ell}E$. Stąd wynika, że E nie jest macierzą nilpotentną. Otrzymaliśmy sprzeczność z tym, że $J(\mathcal{A})$ jest ideałem nilpotentnym. To pokazuje drugie zawieranie i kończy dowód. $\square$

Lemat 3.4.2. Niech $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ będzie izomorfizmem D_q podalgebr $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ algebry $M_n(K)$ odpowiednio kształtów $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ II typu. Wówczas dla dowolnej liczby $i \in \{1, 2, \dots, q\}$

$$\varphi \left(\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \end{array} \right) \right) \subseteq \left(\begin{array}{c|c|c} \mathcal{B}_{1i} & \cdots & \mathcal{B}_{1q} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathcal{B}_{ii} & \cdots & \mathcal{B}_{iq} \end{array} \right).$$

Dowód. Niech i będzie dowolną liczbą ze zbioru $\{1, 2, \dots, q\}$. Ze Stwierdzenia 3.1.7 wynika, że

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^i \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \end{array} \right) = \{0_n\} \quad \text{oraz} \quad \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \end{array} \right) \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^{q-i+1} = \{0_n\},$$

Ponieważ φ jest izomorfizmem, a obraz izomorficzny ideału $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ jest równy $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ (patrz Uwaga 3.2.2), to otrzymujemy następujące równości

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^i \cdot \varphi \left(\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \end{array} \right) \right) = \{0_n\} \quad \text{oraz} \quad \varphi \left(\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \end{array} \right) \right) \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{q-i+1} = \{0_n\}. \quad (3.4.3)$$

W dowodzie oprzemy się na dwóch ostatnich tożsamościach z formuły (3.4.3).

Zacniemy od pokazania, że dla dowolnej liczby $s \in \{1, 2, \dots, q-1\}$

$$\varphi \left(\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ss} & \\ \hline & & \end{array} \right) \right) \subseteq \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \dots & \mathcal{B}_{1s} & \mathcal{B}_{1,s+1} & \dots & \mathcal{B}_{1q} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{B}_{ss} & \mathcal{B}_{s,s+1} & \dots & \mathcal{B}_{sq} \\ & & 0_{n_{s+1}} & \dots & 0_{n_{s+1}, n_q} & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 0_{n_q} & \end{pmatrix}. \quad (3.4.4)$$

Niech $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}$ będzie dowolną macierzą ze zbioru $\varphi \left(\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ss} & \\ \hline & & \end{array} \right) \right)$,
niech j będzie dowolną liczbą naturalną taką, że

$$\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_s < j \leq \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_s + \ell_{s+1} + \dots + \ell_q = n.$$

Wtedy ze Stwierdzenia 3.1.7 wynika, że $e_{1j} \in \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^s$. Zatem z pierwszej równości w (3.4.3) otrzymujemy tożsamość

$$e_{1j}Y = \begin{pmatrix} y_{j1} & \dots & y_{jn} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 0_n.$$

Stąd wiersze o numerach $\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_s + 1, \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_s + 2, \dots, n$ macierzy Y są zerowe. Ponieważ Y jest dowolną macierzą ze zbioru $\varphi \left(\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ss} & \\ \hline & & \end{array} \right) \right)$, to pokazaliśmy zawieranie (3.4.4).

Podobnie jak zawieranie (3.4.4) pokazujemy, że dla dowolnej liczby $t \in \{2, 3, \dots, q\}$

$$\varphi \left(\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{tt} & \\ \hline & & \end{array} \right) \right) \subseteq \begin{pmatrix} 0_{n_1} & \dots & 0_{n_1 \times n_{t-1}} & \mathcal{B}_{1,t} & \dots & \mathcal{B}_{1q} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0_{n_{t-1}} & \mathcal{B}_{t-1,t} & \dots & \mathcal{B}_{t-1,q} \\ & & & \mathcal{B}_{tt} & \dots & \mathcal{B}_{tq} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \mathcal{B}_{qq} \end{pmatrix}. \quad (3.4.5)$$

Powyższe zawieranie dowodzimy, korzystając z drugiej z równości w (3.4.3).

Z otrzymanych formuł (3.4.4) i (3.4.5) wynika teza lematu. $\square$

Wniosek 3.4.3. Niech $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ będą pełnymi podalgebrami $M_n(K)$ odpowiednio kształtów $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$. Niech $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ będzie izomorfizmem algebr $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$. Wtedy dla dowolnej liczby $i \in \{1, 2, \dots, q\}$

$$\varphi \left(\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \end{array} \right) \right) \subseteq \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{1i} & \dots & \mathcal{B}_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{B}_{ii} & \dots & \mathcal{B}_{iq} \end{pmatrix}.$$

Dowód. Ze Stwierdzenia 3.4.1, dla dowolnej liczby $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, wynikają równości

$$J(\mathcal{A})^i \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) = \{0_n\} \quad \text{oraz} \quad \left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) \cdot J(\mathcal{A})^{q-i+1} = \{0_n\}.$$

Ponieważ obraz izomorficzny radykału Jacobsona $J(\mathcal{A})$ jest równy radykałowi Jacobsona $J(\mathcal{B})$, to otrzymujemy, że

$$J(\mathcal{B})^i \cdot \varphi \left(\left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) \right) = \{0_n\} \quad \text{oraz} \quad \varphi \left(\left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) \right) \cdot J(\mathcal{B})^{q-i+1} = \{0_n\}.$$

Ideały $J(\mathcal{B})$ oraz $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ są równe, zatem powyższe równości są tożsame z równościami (3.4.3). Na nich opiera się dowód Lematu 3.4.2, więc powtarzając go, otrzymujemy tezę wniosku. $\square$

Twierdzenie 3.4.4. *Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą D_q podalgebrami $M_n(K)$ kształtów odpowiednio $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ i $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ II typu. Jeśli algebry $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są izomorficzne, to dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ algebra $\mathcal{A}_{ii}$ jest izomorficzna z algebrą $\mathcal{B}_{ii}$ oraz spełniona jest równość $n_i = \ell_i$.*

Dowód. Niech $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ będzie izomorfizmem algebr $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Ponieważ z Uwagi 3.2.2 $\varphi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$, to φ indukuje izomorfizm algebr ilorazowych $\bar{\varphi}: \mathcal{A}/\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$. Spełnia on równość $\bar{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}} = \pi_{\mathcal{B}} \circ \varphi$, gdzie $\pi_{\mathcal{A}}$ oraz $\pi_{\mathcal{B}}$ są naturalnymi homomorfizmami algebr $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ odpowiednio na algebry ilorazowe $\mathcal{A}/\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ oraz $\mathcal{B}/\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$.

Niech $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ będzie dowolną liczbą. Zastosujemy funkcję $\bar{\varphi}$ do pokazania izomorfizmu algebr $\mathcal{A}_{ii}$ oraz $\mathcal{B}_{ii}$. Z równości $\bar{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}} = \pi_{\mathcal{B}} \circ \varphi$ oraz Lematu 3.4.2 wynika, że

$$\bar{\varphi} \left(\pi_{\mathcal{A}} \left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) \right) = \pi_{\mathcal{B}} \left(\varphi \left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & \mathcal{B}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) \right) \subseteq \pi_{\mathcal{B}} \left(\left(\begin{array}{c|c|c} \hline \mathcal{B}_{1i} & \dots & \mathcal{B}_{1q} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathcal{B}_{ii} & \dots & \mathcal{B}_{iq} \\ \hline \end{array} \right) \right). \quad (3.4.6)$$

Jeśli przeprowadzimy analogiczne rozumowanie z izomorfizmem algebr $\varphi^{-1}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, to dostaniemy izomorfizm indukowany $\bar{\varphi}^{-1}: \mathcal{B}/\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, dla którego

$$\bar{\varphi}^{-1} \left(\pi_{\mathcal{B}} \left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & \mathcal{B}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) \right) = \pi_{\mathcal{A}} \left(\varphi^{-1} \left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & \mathcal{B}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) \right) \subseteq \pi_{\mathcal{A}} \left(\left(\begin{array}{c|c|c} \hline \mathcal{A}_{1i} & \dots & \mathcal{A}_{1q} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathcal{A}_{ii} & \dots & \mathcal{A}_{iq} \\ \hline \end{array} \right) \right). \quad (3.4.7)$$

Na mocy Stwierdzenia 3.1.7 podzbiory

$$\pi_{\mathcal{A}} \left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right), \quad \pi_{\mathcal{A}} \left(\left(\begin{array}{c|c|c} \hline \mathcal{A}_{1i} & \dots & \mathcal{A}_{1q} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathcal{A}_{ii} & \dots & \mathcal{A}_{iq} \\ \hline \end{array} \right) \right)$$

algebry ilorazowej $\mathcal{A}/\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ możemy utożsamić z podzbiorem $\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}\right)$ algebry $\mathcal{A}$ oraz podzbiory

$$\pi_{\mathcal{B}} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \mathcal{B}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right), \quad \pi_{\mathcal{B}} \left(\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathcal{B}_{1i} & \dots & \mathcal{B}_{1q} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathcal{B}_{ii} & \dots & \mathcal{B}_{iq} \\ \hline \end{array} \right) \right)$$

algebry ilorazowej $\mathcal{B}/\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ możemy utożsamić z podzbiorem $\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \mathcal{B}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}\right)$ algebry $\mathcal{B}$. Stosując opisane utożsamienia do formuł (3.4.6) i (3.4.7), otrzymujemy zawierania

$$\overline{\varphi} \left(\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) \right) \subseteq \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \mathcal{B}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right), \quad \overline{\varphi^{-1}} \left(\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \mathcal{B}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) \right) \subseteq \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right).$$

Ponieważ $\overline{\varphi^{-1}} = \overline{\varphi}^{-1}$, to wynika z nich równość

$$\overline{\varphi} \left(\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) \right) = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \mathcal{B}_{ii} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right).$$

Zatem algebry $\mathcal{A}_{ii}$ oraz $\mathcal{B}_{ii}$ są izomorficzne.

Aby zakończyć dowód, pozostaje pokazać, że $n_i = \ell_i$. Ponieważ $\mathcal{A}_{ii}$ oraz $\mathcal{B}_{ii}$ są izomorficznymi, przemiennymi podalgebrami $M_{n_i}(K)$ oraz $M_{\ell_i}(K)$ maksymalnych wymiarów, równych odpowiednio $1 + \left\lfloor \frac{n_i^2}{4} \right\rfloor$ i $1 + \left\lfloor \frac{\ell_i^2}{4} \right\rfloor$, to

$$1 + \left\lfloor \frac{n_i^2}{4} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{\ell_i^2}{4} \right\rfloor.$$

Z powyższej równości oraz podstawowych własności części całkowitej liczby rzeczywistej wynika, że $n_i = \ell_i$. Dowód został zakończony. $\square$

Korzystając z dowodu poprzedniego twierdzenia, otrzymujemy następujący wynik.

Wniosek 3.4.5. Niech $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ będą pełnymi podalgebrami $M_n(K)$ kształtów odpowiednio $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$. Algebry $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ spełniona jest równość $n_i = \ell_i$.

Dowód. Jeśli $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są pełnymi podalgebrami $M_n(K)$ tych samych kształtów, to $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Zatem algebry $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są izomorficzne. To pokazuje jedną z implikacji.

Założmy, że algebry $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$, które są pełnymi podalgebrami $M_n(K)$, odpowiednio kształtów $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ i $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$, są izomorficzne. Pokażemy, że $n_1 = \ell_1$, $n_2 = \ell_2$, ..., $n_q = \ell_q$. Niech $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ będzie izomorfizmem algebr. Ponieważ obraz izomorficzny radykału Jacobsona algebry $\mathcal{A}$ jest równy radykałowi Jacobsona algebry $\mathcal{B}$,

to otrzymujemy izomorfizm algebr ilorazowych $\bar{\varphi}: \mathcal{A}/J(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}/J(\mathcal{B})$. Spełnia on równość $\bar{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}} = \pi_{\mathcal{B}} \circ \varphi$, gdzie $\pi_{\mathcal{A}}$ i $\pi_{\mathcal{B}}$ są naturalnymi homomorfizmami odpowiednio na algebry ilorazowe $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ i $\mathcal{B}/J(\mathcal{B})$. Sprawdźmy, że dla tak określonych funkcji $\bar{\varphi}$, $\pi_{\mathcal{A}}$, $\pi_{\mathcal{B}}$ spełnione są zależności ze wzorów (3.4.6) oraz (3.4.7). Załóżmy, że i jest dowolną liczbą ze zbioru $\{1, 2, \dots, q\}$. Na mocy Wniosku 3.4.3

$$\varphi \left(\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \end{array} \right) \right) \subseteq \left(\begin{array}{c|cc} \mathcal{B}_{1i} & \dots & \mathcal{B}_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathcal{B}_{ii} & \dots & \mathcal{B}_{iq} \\ \hline \end{array} \right),$$

więc

$$\bar{\varphi} \left(\pi_{\mathcal{A}} \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \end{array} \right) \right) = \pi_{\mathcal{B}} \left(\varphi \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \end{array} \right) \right) \subseteq \pi_{\mathcal{B}} \left(\left(\begin{array}{c|cc} \mathcal{B}_{1i} & \dots & \mathcal{B}_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathcal{B}_{ii} & \dots & \mathcal{B}_{iq} \\ \hline \end{array} \right) \right).$$

Pokazaliśmy, że wzór (3.4.6) jest prawdziwy. Podobnie sprawdzamy, że wzór (3.4.7) jest spełniony. Korzystając ze Stwierdzenia 3.4.1 zbiory

$$\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \end{array} \right), \quad \pi_{\mathcal{A}} \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \mathcal{A}_{ii} & \\ \hline & & \end{array} \right) \quad \text{oraz} \quad \pi_{\mathcal{A}} \left(\left(\begin{array}{c|cc} \mathcal{A}_{1i} & \dots & \mathcal{A}_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathcal{A}_{ii} & \dots & \mathcal{A}_{iq} \\ \hline \end{array} \right) \right)$$

możemy utożsamiać. Podobnie możemy utożsamiać analogiczne podzbiory algebr $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{B}/J(\mathcal{B})$. Te utożsamienia wraz ze wzorami (3.4.6) oraz (3.4.7) pokazują izomorfizm algebr $\mathcal{A}_{ii}$ oraz $\mathcal{B}_{ii}$. Wymiary izomorficznych algebr są takie same, więc

$$n_i^2 = \dim \mathcal{A}_{ii} = \dim \mathcal{B}_{ii} = \ell_i^2.$$

Z ostatniej równości wynika, że $n_i = \ell_i$, co kończy dowód. $\square$

Pokażemy, że w przeciwieństwie do Wniosku 3.4.5 implikacji z Twierdzenia 3.4.4 nie możemy odwrócić. Następnie znajdziemy warunek równoważny temu, że dwie D_q podalgebry $M_n(K)$ II typu, gdy K jest ciałem algebraicznie domkniętym, są izomorficzne. Wykorzystamy do tego przemienne podalgebry algebr macierzy maksymalnych wymiarów z Przykładu 2.1.2 oraz Stwierdzenia 2.1.8. Najpierw rozważmy algebry

$$C_t^1(K) = KI_t + \left(\begin{array}{c|c} 0_{t_1} & M_{t_1 \times t_2}(K) \\ \hline 0_{t_2 \times t_1} & 0_{t_2} \end{array} \right) \quad \text{oraz} \quad C_t^2(K) = KI_t + \left(\begin{array}{c|c} 0_{t_2} & M_{t_2 \times t_1}(K) \\ \hline 0_{t_1 \times t_2} & 0_{t_1} \end{array} \right),$$

gdzie t jest liczbą nieparzystą, większą lub równą 3, oraz $t_1 = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$, $t_2 = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor + 1$. W Przykładzie 2.1.2 uzasadniliśmy, że algebry $C_t^1(K)$ oraz $C_t^2(K)$ są izomorficzne. Przez $U(C_t^1(K))$ oraz $U(C_t^2(K))$ będziemy oznaczać zbiory utworzone z tych macierzy należących do algebr $C_t^1(K)$ oraz $C_t^2(K)$, których wyrazy na głównych przekątnych są zerowe. Zatem

$$U(C_t^1(K)) = \left(\begin{array}{c|c} 0_{t_1} & M_{t_1 \times t_2}(K) \\ \hline 0_{t_2 \times t_1} & 0_{t_2} \end{array} \right), \quad U(C_t^2(K)) = \left(\begin{array}{c|c} 0_{t_2} & M_{t_2 \times t_1}(K) \\ \hline 0_{t_1 \times t_2} & 0_{t_1} \end{array} \right). \quad (3.4.8)$$

Lemat 3.4.6. Niech $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ będą D_q podalgebrami $M_n(K)$ takiego samego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ II typu. Załóżmy, że istnieje indeks $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, dla którego liczba n_j jest nieparzysta, większa lub równa 3 oraz $\mathcal{A}_{jj} = C_{n_j}^2(K)$, a $\mathcal{B}_{jj} = C_{n_j}^1(K)$. Wtedy algebry $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ nie są izomorficzne.

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, że algebry $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$, które spełniają założenia lematu, są izomorficzne. Niech $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ będzie izomorfizmem algebr.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy $q = 2$. Następnie wykorzystamy zastosowane argumenty do dowodu lematu, gdy q jest dowolną liczbą naturalną większą od 2.

Jeśli $q = 2$ oraz $j = 1$, to określmy podprzestrzeń

$$V_1 = \begin{pmatrix} U(C_{n_1}^2(K)) & 0_{n_1 \times n_2}(K) \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix} \mathcal{C}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}. \quad (3.4.9)$$

Ponieważ przy izomorfizmie algebr $\varphi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ (patrz Uwaga 3.2.2) oraz obraz elementu nilpotentnego jest nilpotentny, to

$$\varphi(V_1) \subseteq \begin{pmatrix} U(C_{n_1}^1(K)) & M_{n_1 \times n_2}(K) \\ 0_{n_2 \times n_1} & \mathcal{B}_{22} \end{pmatrix} \mathcal{C}_{\mathcal{B}}.$$

Porównamy wymiary przestrzeni V_1 oraz $\varphi(V_1)$. Oznaczmy przez n_{11} liczbę $\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor$, a przez n_{12} liczbę $\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + 1$. Ze Stwierdzenia 3.1.7 wynikają równości

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \mathcal{C}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0_{n_1} & M_{n_1 \times n_2}(K) \\ & 0_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Korzystając dodatkowo ze wzoru (3.4.8) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \dim V_1 &= \dim \left(\begin{pmatrix} 0_{n_{12}} & M_{n_{12} \times n_{11}}(K) & 0_{n_{12} \times n_2}(K) \\ & 0_{n_{11}} & 0_{n_{11} \times n_2} \\ & & 0_{n_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0_{n_1} & M_{n_1 \times n_2}(K) \\ & 0_{n_2} \end{pmatrix} \right) \\ &= \dim \begin{pmatrix} 0_{n_{12}} & 0_{n_{12} \times n_{11}}(K) & M_{n_{12} \times n_2}(K) \\ & 0_{n_{11}} & 0_{n_{11} \times n_2} \\ & & 0_{n_2} \end{pmatrix} = n_{12}n_2, \\ \dim \varphi(V) &\leq \dim \left(\begin{pmatrix} 0_{n_{11}} & M_{n_{11} \times n_{12}}(K) & M_{n_{11} \times n_2}(K) \\ & 0_{n_{12}} & M_{n_{12} \times n_2}(K) \\ & & \mathcal{B}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0_{n_1} & M_{n_1 \times n_2}(K) \\ & 0_{n_2} \end{pmatrix} \right) \\ &= \dim \begin{pmatrix} 0_{n_{11}} & 0_{n_{11} \times n_{11}} & M_{n_{11} \times n_2}(K) \\ & 0_{n_{12}} & 0_{n_{12} \times n_2}(K) \\ & & 0_{n_2} \end{pmatrix} = n_{11}n_2. \end{aligned}$$

Wymiary dowolnej podprzestrzeni algebry i izomorficznego obrazu tej podprzestrzeni są równe, więc

$$n_{12}n_2 = \dim V_1 = \dim \varphi(V_1) \leq n_{11}n_2.$$

Z ostatniej nierówności otrzymujemy, że $n_{12} \leq n_{11}$, co przeczy definicji liczb n_{11} i n_{12} .

Jeśli $q = 2$ oraz $j = 2$, to zdefiniujemy podprzestrzeń

$$W = \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \left(\begin{array}{cc} 0_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2}(K) \\ 0_{n_2 \times n_1} & U(C_{n_2}^1(K)) \end{array} \right) \subseteq \mathcal{B}. \quad (3.4.10)$$

Zastępując w dowodzie poprzedniego przypadku φ izomorfizmem φ^{-1} , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dim W &= \dim \begin{pmatrix} 0_{n_1} & 0_{n_1 \times n_{21}} & M_{n_1 \times n_{22}}(K) \\ & 0_{n_{21}} & 0_{n_{21} \times n_{22}} \\ & & 0_{n_{22}} \end{pmatrix} = n_{22}n_1, \\ \dim \varphi^{-1}(W) &\leq \dim \begin{pmatrix} 0_{n_1} & 0_{n_1 \times n_{22}} & M_{n_1 \times n_{21}}(K) \\ & 0_{n_{22}} & 0_{n_{22} \times n_{21}} \\ & & 0_{n_{21}} \end{pmatrix} = n_{21}n_1, \end{aligned}$$

gdzie $n_{21} = \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor$, $n_{22} = \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor + 1$. Następnie z porównania wymiarów $\dim W$ i $\dim \varphi^{-1}(W)$ także dostajemy sprzeczność. To pokazuje, że lemat jest prawdziwy dla $q = 2$.

Założmy, że $q > 2$. Ponieważ $\varphi(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) = \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^2$, to istnieje izomorfizm algebr ilorazowych $\bar{\varphi}: \mathcal{A}/\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^2 \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2$ spełniający równość $\bar{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}} = \pi_{\mathcal{B}} \circ \varphi$, gdzie $\pi_{\mathcal{A}}$ i $\pi_{\mathcal{B}}$ są naturalnymi homomorfizmami odpowiednio na algebry $\mathcal{A}/\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^2$ i $\mathcal{B}/\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2$. Podobny izomorfizm używaliśmy w dowodzie Twierdzenia 3.4.4. Jeśli $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{B}$, to element $\pi_{\mathcal{A}}(x)$ będziemy oznaczać przez $\bar{x}$, natomiast element $\pi_{\mathcal{B}}(y)$ będziemy oznaczać przez $\bar{y}$. Na mocy Stwierdzenia 3.1.7 każdy element algebry ilorazowej $\mathcal{A}/\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^2$ możemy utożsamiać z dokładnie jednym elementem zbioru

$$\left(\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & 0_{n_1 \times n_3} & \cdots & 0_{n_1 \times n_q} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0_{n_{q-2} \times n_q} \\ & & & \ddots & \mathcal{A}_{q-1,q} \\ & & & & \mathcal{A}_{qq} \end{array} \right) \subseteq \mathcal{A}. \quad (3.4.11)$$

Dowolny element algebry ilorazowej $\mathcal{B}/\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2$ możemy utożsamiać z analogicznie określonym podzbiorem $\mathcal{B}$.

Jeśli $j < q$, to uogólnimy konstrukcję zbioru (3.4.9), a jeśli $j = q$, to uogólnimy konstrukcję zbioru (3.4.10). Analogicznie jak w przypadku, gdy $q = 2$ porównamy wymiary pewnych zbiorów z ich obrazami izomorficznymi. Dla dowolnego j przez n_{j1} oraz n_{j2} będziemy oznaczać odpowiednio liczby $\lfloor \frac{n_j}{2} \rfloor$ oraz $\lfloor \frac{n_j}{2} \rfloor + 1$.

Założmy, że $j \in \{1, 2, \dots, q-1\}$. Określmy podprzestrzeń

$$V_j = \left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & U(C_{n_j}^2(K)) & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) \bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}/\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^2.$$

Korzystając z utożsamienia elementów algebry ilorazowej z elementami (3.4.11) i z drugiej

równości w (3.4.8), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\dim V_j &= \dim \left(\overline{\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & U(C_{n_j}^2(K)) & \\ \hline & & \end{array} \right)} \cdot \begin{pmatrix} 0_{n_1} & \mathcal{A}_{12} & 0_{n_1 \times n_3} & \cdots & 0_{n_1 \times n_q} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0_{n_{q-2} \times n_q} \\ & & & \ddots & \mathcal{A}_{q-1,q} \\ & & & & 0_{n_q} \end{pmatrix} \right) \\
&= \dim \left(U(C_{n_j}^2(K)) \cdot \mathcal{A}_{jj+1} \right) = \dim \left(\begin{pmatrix} 0_{n_{j2}} & M_{n_{j2} \times n_{j1}}(K) \\ 0_{n_{j1} \times n_{j2}} & 0_{n_{j1}} \end{pmatrix} \cdot M_{n_j \times n_{j+1}}(K) \right) \\
&= n_{j2} \cdot n_{j+1}.
\end{aligned}$$

Wyznamy wymiar obrazu $\overline{\varphi}(V_j)$. Z równości $\overline{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}} = \pi_{\mathcal{B}} \circ \varphi$ oraz tego, że $\varphi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ wynika, że

$$\overline{\varphi}(V_j) = \varphi \left(\overline{\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & U(C_{n_j}^2(K)) & \\ \hline & & \end{array} \right)} \right) \overline{\varphi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})} = \varphi \left(\overline{\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & U(C_{n_j}^2(K)) & \\ \hline & & \end{array} \right)} \right) \overline{\mathcal{C}_{\mathcal{B}}}.$$

Korzystając dodatkowo z Lematu 3.4.2, otrzymujemy zawieranie

$$\overline{\varphi}(V_j) \subseteq \overline{\left(\begin{array}{c|c|c|c} & \mathcal{B}_{1j} & \mathcal{B}_{1j+1} & \cdots & \mathcal{B}_{1q} \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \mathcal{B}_{j-1,j} & \mathcal{B}_{j-1,j+1} & \cdots & \mathcal{B}_{j-1,q} \\ \hline & U(C_{n_j}^1(K)) & \mathcal{B}_{j,j+1} & \cdots & \mathcal{B}_{jq} \\ \hline & & & & \end{array} \right)} \overline{\mathcal{C}_{\mathcal{B}}}.$$

Podobnie jak znaleźliśmy wymiar przestrzeni V_j , sprawdzamy, że wymiar przestrzeni po prawej stronie ostatniego zawierania jest równy

$$\dim(U(C_{n_j}^1(K))\mathcal{B}_{j,j+1}) = \dim \left(\begin{pmatrix} 0_{n_{j1}} & M_{n_{j1} \times n_{j2}}(K) \\ 0_{n_{j2} \times n_{j1}} & 0_{n_{j2}} \end{pmatrix} \cdot M_{n_j \times n_{j+1}}(K) \right) = n_{j1} \cdot n_{j+1}.$$

Pokazaliśmy, że $\dim V_j = n_{j2} \cdot n_{j+1}$ oraz, że $\dim \overline{\varphi}(V_j) \leq n_{j1} \cdot n_{j+1}$. Ponieważ wymiary $\dim V_j$ oraz $\dim \overline{\varphi}(V_j)$ są równe, to dostajemy nierówność $n_{j2} \leq n_{j1}$. Otrzymaliśmy sprzeczność z definicją liczb n_{j1} oraz n_{j2} .

Aby zakończyć dowód, założmy, że $j = q$. Określmy podprzestrzeń

$$W = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{q-1} \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & U(C_{n_q}^1(K)) \end{array} \right) \subseteq \mathcal{B}.$$

Ze Stwierdzenia 3.1.7 oraz z pierwszej równości w (3.4.8) wynika, że wymiar przestrzeni W jest równy

$$\dim(\mathcal{B}_{1q} \cdot U(C_{n_q}^1(K))) = \dim \left(M_{n_1 \times n_q}(K) \cdot \begin{pmatrix} 0_{n_{q1}} & M_{n_{q1} \times n_{q2}}(K) \\ 0_{n_{q2} \times n_{q1}} & 0_{n_{q2}} \end{pmatrix} \right) = n_1 n_{q2}.$$

Ponieważ φ^{-1} jest izomorfizmem algebr, to $\varphi^{-1}(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}) = \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ oraz obraz elementu nilpotentnego jest elementem nilpotentnym. Stąd wynika, że

$$\varphi^{-1}(W) = \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^{q-1} \varphi^{-1} \left(\left(\begin{array}{c|c} & U(C_{n_q}^1(K)) \end{array} \right) \right) \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^{q-1} \left(\begin{array}{cccc} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \dots & \mathcal{A}_{1q} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{q-1,q-1} & \mathcal{A}_{q-1,q} \\ & & & U(C_{n_q}^2(K)) \end{array} \right).$$

Podobnie jak znaleźliśmy wymiar przestrzeni W , znajdujemy wymiar przestrzeni znajdującej się po prawej stronie powyższego zawieranie i dostajemy nierówność

$$\dim \varphi^{-1}(W) \leq \dim (\mathcal{A}_{1q} \cdot U(C_{n_q}^2(K))) = n_1 n_{q1}.$$

Z porównania wymiarów $\dim W$ oraz $\dim \varphi^{-1}(W)$ otrzymujemy, że $n_{q2} \leq n_{q1}$. Przeczy to definicji liczb n_{q2} oraz n_{q1} i kończy dowód. $\square$

W następnym twierdzeniu podamy warunki konieczne i wystarczające na to, aby D_q podalgebry $M_n(K)$ II typu, gdzie K jest ciałem algebraicznie domkniętym, były izomorficzne. Uzyskamy taką samą charakteryzację jak w Twierdzeniu 3.3.6. Zatem w rozważanym przez nas przypadku algebry są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy są sprzężone.

Twierdzenie 3.4.7. *Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ będą D_q podalgebrami $M_n(K)$ odpowiednio kształtów $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ II typu. Algebry $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ liczby n_j i ℓ_j są równe oraz algebry $\mathcal{A}_{jj}$ i $\mathcal{B}_{jj}$, będące podalgebrami $M_{n_j}(K)$, są sprzężone.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są D_q podalgebrami $M_n(K)$ tego samego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ II typu takimi, że dla każdego $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ algebry $\mathcal{A}_{jj}$ oraz $\mathcal{B}_{jj}$ są sprzężone. Wtedy z Twierdzenia 3.3.6 podalgebry $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są sprzężone, więc są one izomorficzne. To dowodzi jednej z implikacji.

Założmy teraz, że $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są izomorficznymi D_q podalgebrami $M_n(K)$ odpowiednio kształtów $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ II typu. Wtedy z Twierdzenia 3.4.4

$$n_1 = \ell_1, \quad n_2 = \ell_2, \quad \dots, \quad n_q = \ell_q$$

oraz dla dowolnej liczby $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ algebry $\mathcal{A}_{jj}$ oraz $\mathcal{B}_{jj}$ są izomorficzne. Ponieważ $\mathcal{A}_{jj}$ oraz $\mathcal{B}_{jj}$ są przemiennymi podalgebrami $M_{n_j}(K)$ maksymalnych wymiarów nad ciałem algebraicznie domkniętym K , to z Wniosku 2.1.9 istnieją liczby naturalne s_j i t_j oraz macierze odwracalne $X_{jj}, Y_{jj} \in M_{n_j}(K)$ takie, że

$$X_{jj}^{-1} \mathcal{A}_{jj} X_{jj} = C_{n_j}^{s_j}(K) \quad \text{ i } \quad Y_{jj}^{-1} \mathcal{B}_{jj} Y_{jj} = C_{n_j}^{t_j}(K). \quad (3.4.12)$$

Pokażemy, że z izomorfizmu algebr $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ wynika, że poniżej określone, blokowo trójkątne podalgebry $\mathcal{A}'$ oraz $\mathcal{B}'$ algebry $M_n(K)$ są izomorficzne

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} C_{n_1}^{s_1}(K) & M_{n_1 \times n_2}(K) & \cdots & M_{n_1 \times n_q}(K) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & C_{n_{q-1}}^{s_{q-1}}(K) & M_{n_{q-1} \times n_q}(K) \\ & & & C_{n_q}^{s_q}(K) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}' = \begin{pmatrix} C_{n_1}^{t_1}(K) & M_{n_1 \times n_2}(K) & \cdots & M_{n_1 \times n_q}(K) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & C_{n_{q-1}}^{t_{q-1}}(K) & M_{n_{q-1} \times n_q}(K) \\ & & & C_{n_q}^{t_q}(K) \end{pmatrix}.$$

Istotnie, są to D_q podalgebry $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ II typu. Zatem z formuły (3.4.12) oraz Twierdzenia 3.3.6 dostajemy, że algebry $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ są sprzężone, podobnie algebry $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ są sprzężone. Ponieważ algebry $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są izomorficzne, to sprzężone z nimi algebry $\mathcal{A}'$ i $\mathcal{B}'$ są także izomorficzne.

Udowodnimy, że algebry $\mathcal{A}'$ oraz $\mathcal{B}'$ są równe. Niech j będzie dowolną liczbą ze zbioru $\{1, 2, \dots, q\}$. Z Twierdzenia 3.4.4 wynika, że algebry $C_{n_j}^{s_j}(K)$ i $C_{n_j}^{t_j}(K)$ są izomorficzne. Z Wniosku 2.1.9 taki izomorfizm jest możliwy jedynie, gdy $s_j = t_j$ lub n_j jest liczbą nieparzystą, większą lub równą 3 i $(s_j, t_j) = (1, 2)$ albo $(s_j, t_j) = (2, 1)$. Jednak jeśli $(s_j, t_j) = (1, 2)$ lub $(s_j, t_j) = (2, 1)$, to na mocy Lematu 3.4.6 algebry $\mathcal{A}'$ oraz $\mathcal{B}'$ nie są izomorficzne. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$.

Z równości algebr $\mathcal{A}'$ oraz $\mathcal{B}'$ oraz formuły (3.4.12) wynika, że

$$X_{jj}^{-1} \mathcal{A}_{jj} X_{jj} = Y_{jj}^{-1} \mathcal{B}_{jj} Y_{jj}, \quad \text{więc} \quad (X_{jj} Y_{jj}^{-1})^{-1} \mathcal{A}_{jj} (X_{jj} Y_{jj}^{-1}) = \mathcal{B}_{jj}.$$

Ponieważ liczba j jest dowolna, to pokazaliśmy, że diagonalne bloki algebr $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są sprzężone. Dowód został zakończony. $\square$

Uzasadniając prawdziwość drugiej z implikacji, udowodniliśmy, że dla każdej liczby $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ diagonalne bloki $\mathcal{A}_{jj}$ oraz $\mathcal{B}_{jj}$, odpowiednio podalgebr $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$, są sprzężone z dokładnie jedną algebrą $C_{n_j}^{t_j}(K)$ dla pewnej liczby naturalnej t_j . Otrzymujemy zatem następujący wniosek.

Wniosek 3.4.8. Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ będą D_q podalgebrami $M_n(K)$ odpowiednio kształtów $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ II typu. Algebry $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ liczby n_j oraz ℓ_j są równe i istnieje dokładnie jedna liczba naturalna t_j taka, że algebry $\mathcal{A}_{jj}$ oraz $\mathcal{B}_{jj}$, będące podalgebrami $M_{n_j}(K)$, są sprzężone z $C_{n_j}^{t_j}(K)$.

3.5 D_q podalgebry III typu

W tym podrozdziale znajdziemy jawny wzór na maksymalny wymiar D_q podalgebry $M_n(K)$. Otrzymamy go ze szczegółowej analizy ciągów liczb naturalnych $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ takich, że D_q podalgebry $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ mają maksymalny wymiar. Na rozważanych podalgebrach zilustrujemy wyniki dotyczące problemów sprzężeń oraz izomorfizmów D_q podalgebr $M_n(K)$, otrzymane we wcześniejszych podrozdziałach. Przedstawione rezultaty pochodzą z Rozdziału 6 pracy [49] autorstwa van Wyka i Ziembowskiego. Pomimo tego, że mają one bardziej rachunkowy charakter, podajemy je wraz z dowodami dla pełności rozważań.

Na początku Rozdziału 3 (patrz wzór (3.1.7)) pokazaliśmy, że wymiar dowolnej D_q podalgebry $\mathcal{A}$ algebry $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ II typu jest równy

$$\frac{n^2}{2} + q - \sum_{i=1}^q \left(\frac{n_i^2}{2} - \left\lfloor \frac{n_i^2}{4} \right\rfloor \right).$$

Z powyższego wzoru wynika następujący wniosek.

Wniosek 3.5.1. Niech σ będzie dowolną permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, q\}$. Jeżeli $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ II typu, to każda D_q podalgebra $M_n(K)$ kształtu $(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, \dots, n_{\sigma(q)})$ II typu ma ten sam wymiar co algebra $\mathcal{A}$. Gdy algebra $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu, to ciąg $(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, \dots, n_{\sigma(q)})$ wyznacza D_q podalgebrę $M_n(K)$ kształtu $(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, \dots, n_{\sigma(q)})$ III typu.

Lemat 3.5.2. *Nich $\mathcal{A}$ będzie D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ II typu taką, że $|n_2 - n_1| \geq 2$. Nich $\mathcal{B}$ będzie dowolną D_q podalgebrą $M_n(K)$ II typu kształtu*

- a) $(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, n_4, \dots, n_q)$, jeśli $n_2 - n_1 \geq 2$,
- b) $(n_1 - 1, n_2 + 1, n_3, n_4, \dots, n_q)$, jeśli $n_1 - n_2 \geq 2$.

Wtedy $\dim \mathcal{B} - \dim \mathcal{A} \geq 0$ i równość $\dim \mathcal{B} = \dim \mathcal{A}$ zachodzi jedynie, gdy liczby n_1 oraz n_2 są parzyste takie, że $|n_2 - n_1| = 2$.

Dowód. Udowodnimy tezę z założeniem, że spełniony jest warunek a). Dowód w drugim przypadku jest analogiczny.

Określmy funkcję $f: \mathbb{N}^q \rightarrow \mathbb{N}$ wzorem

$$f(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q) = \frac{n^2}{2} + q - \sum_{i=1}^q \left(\frac{\ell_i^2}{2} - \left\lfloor \frac{\ell_i^2}{4} \right\rfloor \right),$$

gdzie $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q \in \mathbb{N}$. Wtedy na mocy wzoru (3.1.7) $\dim \mathcal{B} = f(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, \dots, n_q)$, natomiast $\dim \mathcal{A} = f(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Zatem różnica $\dim \mathcal{B} - \dim \mathcal{A}$ jest równa

$$\left(\frac{n_1^2}{2} - \left\lfloor \frac{n_1^2}{4} \right\rfloor + \frac{n_2^2}{2} - \left\lfloor \frac{n_2^2}{4} \right\rfloor \right) - \left(\frac{(n_1 + 1)^2}{2} - \left\lfloor \frac{(n_1 + 1)^2}{4} \right\rfloor + \frac{(n_2 - 1)^2}{2} - \left\lfloor \frac{(n_2 - 1)^2}{4} \right\rfloor \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(n_1^2 + n_2^2 - (n_1 + 1)^2 - (n_2 - 1)^2 \right) + \left\lfloor \frac{(n_1 + 1)^2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_1^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(n_2 - 1)^2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_2^2}{4} \right\rfloor \\
&= n_2 - n_1 - 1 + \left\lfloor \frac{(n_1 + 1)^2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_1^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(n_2 - 1)^2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_2^2}{4} \right\rfloor. \tag{3.5.1}
\end{aligned}$$

Rozpatrzmy wyrażenie (3.5.1) w zależności od parzystości liczb n_1, n_2 .

Założmy najpierw, że liczby n_1 i n_2 są nieparzyste. Zapiszmy $n_1 = 2k_1 + 1$ i $n_2 = 2k_2 + 1$ dla pewnych $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ponieważ $n_2 - n_1 \geq 2$, to $k_2 - k_1 \geq 1$. Po podstawieniu do (3.5.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&2k_2 - 2k_1 - 1 + \left\lfloor \frac{4k_1^2 + 8k_1 + 4}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{4k_1^2 + 4k_1 + 1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k_2^2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{4k_2^2 + 4k_2 + 1}{4} \right\rfloor = \\
&= 2k_2 - 2k_1 - 1 + (k_1^2 + 2k_1 + 1 - k_1^2 - k_1) + (k_2^2 - k_2^2 - k_2) = k_2 - k_1 \geq 1.
\end{aligned}$$

Ponieważ wyrażenie (3.5.1) jest równe różnicy $\dim \mathcal{B} - \dim \mathcal{A}$, to w rozpatrywanym przypadku pokazaliśmy, że $\dim \mathcal{B} - \dim \mathcal{A} \geq 1$. Podobnie sprawdzamy, że $\dim \mathcal{B} - \dim \mathcal{A} \geq 1$, gdy liczby n_1 i n_2 są różnej parzystości.

Na koniec założmy, że liczby n_1 i n_2 są parzyste. Niech $n_1 = 2k_1$ i $n_2 = 2k_2$ dla pewnych $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Wtedy jak w pierwszym przypadku $k_2 - k_1 \geq 1$, a formuła (3.5.1) przyjmuje postać

$$2k_2 - 2k_1 - 1 + (k_1^2 + k_1 - k_1^2) + (k_2^2 - k_2 - k_2^2) = k_2 - k_1 - 1 \geq 0.$$

Ponieważ wyrażenie (3.5.1) jest równe różnicy $\dim \mathcal{B} - \dim \mathcal{A}$, to

$$\begin{cases} \dim \mathcal{B} = \dim \mathcal{A} & \text{dla } k_2 = k_1 + 1, \\ \dim \mathcal{B} - \dim \mathcal{A} \geq 1 & \text{dla } k_2 \neq k_1 + 1. \end{cases}$$

Pokazaliśmy, że nierówność $\dim \mathcal{B} - \dim \mathcal{A} \geq 0$ jest spełniona niezależnie od parzystości liczb n_1, n_2 . Udowodniliśmy również, że $\dim \mathcal{B} = \dim \mathcal{A}$ jedynie, gdy liczby n_1 i n_2 są parzyste takie, że $n_2 = n_1 + 2$. To kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 3.5.3. *Niech n i q będą liczbami naturalnymi takimi, że $2 \leq q \leq n$ i niech r będzie resztą z dzielenia liczby n przez q . Wtedy maksymalny wymiar D_q podalgebry $M_n(K)$ jest równy*

$$\frac{n^2}{2} + q - \frac{1}{2} \left((q - r) \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor^2 + r \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right)^2 \right) + (q - r) \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor^2}{4} \right\rfloor + r \left\lfloor \frac{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right)^2}{4} \right\rfloor.$$

Przykładem D_q podalgebry $M_n(K)$ takiego wymiaru jest dowolna D_q podalgebra $M_n(K)$ kształtu

$$\left(\underbrace{\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor}_{q-r \text{ razy}}, \underbrace{\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1}_r \right)$$

III typu.

Dowód. Maksymalny możliwy wymiar D_q podalgebry $M_n(K)$ jest równy wymiarowi dowolnej D_q podalgebry $\mathcal{A}$ algebry $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu. Pokażemy, że wychodząc od wspomnianej algebry $\mathcal{A}$, możemy skonstruować D_q podalgebrę $\mathcal{B}$ algebry $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ III typu taką, że $|\ell_i - \ell_j| \leq 1$ dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Jeżeli $|n_i - n_j| \leq 1$ dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \dots, q\}$, to za algebrę $\mathcal{B}$ możemy przyjąć algebrę $\mathcal{A}$. Załóżmy, że istnieją $i, j \in \{1, 2, \dots, q\}$ takie, że $|n_i - n_j| \geq 2$. Określmy permutację $\sigma = (1i)(2j)$. Z Wniosku 3.5.1 wynika, że ciąg $(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, \dots, n_{\sigma(q)})$ wyznacza D_q podalgebrę $M_n(K)$ III typu. Niech więc $\mathcal{A}'$ będzie dowolną D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, \dots, n_{\sigma(q)})$ III typu. Na mocy Lematu 3.5.2 zastosowanego do $\mathcal{A}'$ otrzymujemy, że liczby n_i oraz n_j są parzyste i spełniają równość $|n_i - n_j| = 2$. Istotnie, w przeciwnym przypadku możemy znaleźć D_q podalgebrę $M_n(K)$ większego wymiaru niż $\mathcal{A}'$, co jest niemożliwe. Jeśli $n_i = n_j + 2$, to znów z Lematu 3.5.2 wynika, że kształt $(n_i - 1, n_j + 1, n_{\sigma(3)}, \dots, n_{\sigma(q)})$ wyznacza D_q podalgebrę $M_n(K)$ III typu. Analogicznie, jeśli $n_i = n_j - 2$, to kształt $(n_i + 1, n_j - 1, n_{\sigma(3)}, \dots, n_{\sigma(q)})$ wyznacza D_q podalgebrę $M_n(K)$ III typu. Gdy $|n_{\sigma(r)} - n_{\sigma(s)}| \leq 1$ dla dowolnych $r, s \in \{3, 4, \dots, q\}$, to za algebrę $\mathcal{B}$ możemy przyjąć jedną z D_q podalgebr $M_n(K)$ kształtu $(n_i - 1, n_j + 1, n_{\sigma(3)}, \dots, n_{\sigma(q)})$ albo $(n_i + 1, n_j - 1, n_{\sigma(3)}, \dots, n_{\sigma(q)})$ III typu.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy istnieją $r, s \in \{3, 4, \dots, q\}$ takie, że $|n_{\sigma(r)} - n_{\sigma(s)}| > 1$. Ponieważ ciąg $(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, n_{\sigma(3)}, n_{\sigma(4)}, \dots, n_{\sigma(q)})$ wyznacza D_q podalgebrę $M_n(K)$ III typu, to ze wzoru (3.1.7) wynika, że ciąg $(n_{\sigma(3)}, n_{\sigma(4)}, \dots, n_{\sigma(q)})$ wyznacza D_{q-2} podalgebrę $M_{n-n_1-n_2}(K)$ III typu. Postępując jak w poprzednim akapicie, otrzymamy D_{q-2} podalgebrę $M_{n-n_1-n_2}(K)$ kształtu

$$(n_r - 1, n_s + 1, n_{\sigma(5)}, \dots, n_{\sigma(q)}) \quad \text{albo} \quad (n_r + 1, n_s - 1, n_{\sigma(5)}, \dots, n_{\sigma(q)})$$

III typu, gdzie odpowiednio $n_r = n_s + 2$ albo $n_r = n_s - 2$. Zatem przy pewnej kombinacji znaków ciąg

$$(n_i \pm 1, n_j \pm 1, n_r \pm 1, n_s \pm 1, n_{\sigma(5)}, \dots, n_{\sigma(q)}),$$

który ma pierwsze 4 współrzędne takie same, wyznacza D_q podalgebrą $M_n(K)$ III typu. Kontynuując to rozumowanie, znajdziemy D_q podalgebrę $\mathcal{B}$ algebry $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ III typu taką, że $|\ell_i - \ell_j| \leq 1$ dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Znajdziemy teraz wymiar algebry $\mathcal{B}$. W tym celu pokażemy, że liczby $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q$ określające kształt $\mathcal{B}$ są równe $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$ lub $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1$. Z własności części całkowitej wynika, że jeśli $\ell_i < \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, to

$$\sum_{i=1}^q \ell_i < q \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \leq q \cdot \frac{n}{q} = n, \quad (3.5.2)$$

a jeśli $\ell_i > \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, to

$$\sum_{i=1}^q \ell_i \geq q \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right) > n. \quad (3.5.3)$$

Nierówności (3.5.2) oraz (3.5.3) przeczą temu, że ciąg $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ wyznacza kształt podalgebry $M_n(K)$. Stąd oraz z nierówności $|\ell_i - \ell_j| \leq 1$ dla dowolnych i, j wynika, że istnieje $t \in \{1, 2, \dots, q\}$ takie, że $n_t = \lfloor \frac{n}{q} \rfloor$. Korzystając ponownie ze stosowanej przed chwilą nierówności, dostajemy, że

$$\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right\} \text{ lub } \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right\}.$$

Jeśli pewna liczba $\ell_i < \lfloor \frac{n}{q} \rfloor$, a pozostałe liczby należą do zbioru $\{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor - 1, \lfloor \frac{n}{q} \rfloor\}$, to $\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_q < n$, co nie jest prawdą. Zatem pokazaliśmy, że $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q \in \{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor, \lfloor \frac{n}{q} \rfloor + 1\}$.

Rozpatrzmy następujący zbiór

$$I = \left\{ i \in \{1, 2, \dots, q\} : \ell_i = \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right\}.$$

Zauważmy, że jest to podzbiór $\{1, 2, \dots, q\}$, różny od niego, ponieważ $\ell_t = \lfloor \frac{n}{q} \rfloor \notin I$. Stąd wynika, że zbiór I ma mniej niż q elementów. Co więcej, liczba elementów zbioru I spełnia równość

$$n = \sum_{i=1}^q \ell_i = (q - |I|) \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + |I| \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right) = q \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + |I|.$$

To pokazuje, że jest ona resztą z dzielenia n przez q . Udowodniliśmy, że podalgebra $\mathcal{B}$ jest D_q podalgebra $M_n(K)$ kształtu

$$\underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)}_{q-r \text{ razy}}, \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right)}_{r \text{ razy}}$$

III typu, gdzie r jest resztą z dzielenia n przez q . Ze wzoru (3.1.7)

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{B} &= \frac{n^2}{2} + q - \sum_{i=1}^q \left(\frac{\ell_i^2}{2} - \left\lfloor \frac{\ell_i^2}{4} \right\rfloor \right) = \frac{n^2}{2} + q - \frac{1}{2} \left((q-r) \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor^2 + r \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right)^2 \right) \\ &\quad + (q-r) \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor^2}{4} \right\rfloor + r \left\lfloor \frac{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right)^2}{4} \right\rfloor, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Jeśli $q = 2$, a n jest liczbą podzielną przez 4, to we wzorze występującym w Twierdzeniu 3.5.3 możemy pominąć symbol część całkowitej i otrzymujemy, że maksymalny wymiar D_2 podalgebry $M_n(K)$ jest równy

$$\frac{n^2}{2} + 2 - \left(\frac{n}{2} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\left(\frac{n}{2} \right)^2}{4} = 2 + \frac{3n^2}{8}. \quad (3.5.4)$$

Natomiast, dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwy jest następujący wzór.

Wniosek 3.5.4. Maksymalny wymiar D_2 podalgebry $M_n(K)$ jest równy $2 + \left\lfloor \frac{3n^2}{8} \right\rfloor$.

Dowód. Z Twierdzenia 3.5.3 wynika, że wymiar maksymalnej D_2 podalgebry $M_n(K)$ jest równy:

- $\frac{n^2}{2} + 2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 + 2 \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2}{4} \right\rfloor$, jeśli n jest liczbą parzystą,
- $\frac{n^2}{2} + 2 - \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 - \frac{1}{2} \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right)^2 + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1)^2}{4} \right\rfloor$, jeśli n jest liczbą nieparzystą.

Przyjmijmy oznaczenia

$$S(n) = 2 + \left\lfloor \frac{3n^2}{8} \right\rfloor, \quad T_1(n) = \frac{n^2}{2} + 2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 + 2 \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2}{4} \right\rfloor,$$

$$T_2(n) = \frac{n^2}{2} + 2 - \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 - \frac{1}{2} \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right)^2 + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1)^2}{4} \right\rfloor.$$

Aby zakończyć dowód, wystarczy pokazać, że

$$S(n) = \begin{cases} T_1(n), & \text{jeśli } n \text{ jest liczbą parzystą,} \\ T_2(n), & \text{jeśli } n \text{ jest liczbą nieparzystą.} \end{cases}$$

Sprawdźmy te równości, rozpatrując możliwe parzystości liczb n oraz $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Jeśli liczby n i $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ są parzyste, to n jest liczbą podzielną przez 4. Wtedy równość $S(n) = T_1(n)$ pokazaliśmy we wzorze (3.5.4).

Załóżmy, że liczba n jest parzysta, a liczba $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ jest nieparzysta. Niech $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 2k + 1$ dla pewnej liczby $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wtedy $n = 4k + 2$, więc

$$S(n) = S(4k + 2) = 2 + \left\lfloor \frac{3 \cdot (16k^2 + 16k + 4)}{8} \right\rfloor = 6k^2 + 6k + 3,$$

$$T_1(n) = T_1(4k + 2) = \frac{16k^2 + 16k + 4}{2} + 2 - (4k^2 + 4k + 1) + 2 \left\lfloor \frac{4k^2 + 4k + 1}{4} \right\rfloor$$

$$= 6k^2 + 6k + 3.$$

Udowodniliśmy, że $S(n) = T_1(n)$ dla dowolnej liczby parzystej n .

Podobnie sprawdzamy, że $S(n) = T_2(n)$ dla dowolnej liczby nieparzystej n . To kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 3.5.5. Niech n oraz q będą liczbami naturalnymi takimi, że $q \leq n$ i niech r będzie resztą z dzielenia n przez q . Ciąg liczb $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ wyznacza pewną D_q podalgebrę $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje permutacja σ zbioru $\{1, 2, \dots, q\}$, dla której spełniony jest jeden z poniższych warunków:

a) Liczba $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$ jest parzysta oraz istnieje liczba $s \in \{0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor\}$ taka, że

$$(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, \dots, n_{\sigma(q)}) = \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)}_{q-r+s \text{ razy}} \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right)}_{r-2s \text{ razy}} \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 2 \right)}_{s \text{ razy}}.$$

b) Liczba $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$ jest nieparzysta oraz istnieje liczba $t \in \{0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{q-r}{2} \right\rfloor\}$ taka, że

$$(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, \dots, n_{\sigma(q)}) = \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor - 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor - 1 \right)}_{t \text{ razy}} \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)}_{q-r-2t \text{ razy}} \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right)}_{r+t \text{ razy}}.$$

Dowód. Niech $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ będzie ciągiem liczb, dla których istnieje permutacja σ spełniająca warunek a) lub b). W przypadku, gdy spełniony jest warunek a), otrzymujemy, że

$$\sum_{i=1}^q n_i = (q-r+s) \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + (r-2s) \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right) + s \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 2 \right) = q \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + r = n.$$

Ostatnia z równości w powyższym wzorze wynika z tego, że r jest resztą z dzielenia liczby n przez q . Podobnie sprawdzamy, że $\sum_{i=1}^q n_i = n$, gdy spełniony jest warunek b). Ze względu na otrzymaną równość, możemy określić D_q podalgebrę $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ II typu. Oznaczmy ją przez $\mathcal{A}$. Poniżej pokażemy, że $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ III typu, co udowodni jedną z implikacji.

Założmy najpierw, że spełniony jest warunek a). Wtedy liczba $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$ jest parzysta oraz istnieje liczba $s \in \{0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor\}$ taka, że

$$(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, \dots, n_{\sigma(q)}) = \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)}_{q-r+s \text{ razy}} \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right)}_{r-2s \text{ razy}} \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 2 \right)}_{s \text{ razy}}.$$

Z powyższej równości wynika, że w ciągu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ jest $q-r+s$ liczb równych $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$ oraz s liczb równych $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 2$. Mamy więc s par liczb parzystych, które różnią się o 2. Niech $n_s = \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$ oraz $n_t = \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 2$ dla pewnych $s, t \in \{1, 2, \dots, q\}$. Wtedy z Wniosku 3.5.1 i Lematu 3.5.2 wynika, że dowolna D_q podalgebra $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ II typu, gdzie

$$\ell_i = \begin{cases} n_i + 1, & \text{jeśli } i = s, \\ n_i - 1, & \text{jeśli } i = t, \\ n_i, & \text{jeśli } i \in \{1, 2, \dots, q\} \setminus \{s, t\}, \end{cases}$$

ma ten sam wymiar co algebra $\mathcal{A}$. Postępując tak samo z innymi parami liczb parzystych, które różnią się o 2, otrzymujemy, że dowolna D_q podalgebra $M_n(K)$ kształtu

$$\underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)}_{q-r \text{ razy}} \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right)}_{r \text{ razy}}$$

II typu ma ten sam wymiar co algebra $\mathcal{A}$. Zatem z Twierdzenia 3.5.3 dostajemy, że $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru. Stąd wynika, że jest ona D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu.

Jeśli spełniony jest warunek b), to podobnie pokazujemy, że $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu. Udowodniliśmy jedną z implikacji.

Założmy teraz, że $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu. Pokażemy, że dla pewnej permutacji σ zbioru $\{1, 2, \dots, q\}$ ciąg $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ spełnia jeden z warunków a) lub b).

Rozpatrzmy najpierw sytuację taką, że istnieją liczby $s, t \in \{1, 2, \dots, q\}$, dla których $|n_t - n_s| \geq 2$. Wtedy na mocy Wniosku 3.5.1 ciąg $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$, gdzie

$$\ell_i = \begin{cases} n_s, & \text{jeśli } i = 1, \\ n_t, & \text{jeśli } i = 2, \\ n_1, & \text{jeśli } i = s, \\ n_2, & \text{jeśli } i = t, \\ n_i, & \text{jeśli } i \in \{3, 4, \dots, q\} \setminus \{s, t\}, \end{cases}$$

także wyznacza D_q podalgebrę $M_n(K)$ III typu. Zatem z Lematu 3.5.2 wynika, że liczby n_s oraz n_t są parzyste i spełniają równość $|n_t - n_s| = 2$. Powtarzając to rozumowanie, otrzymujemy, że dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \dots, q\}$

$$|n_i - n_j| = \begin{cases} 0 \text{ lub } 2, & \text{jeśli liczby } n_i \text{ oraz } n_j \text{ są parzyste,} \\ 0 \text{ lub } 1 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (3.5.5)$$

Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 3.5.3, gdzie rozważaliśmy nierówności (3.5.2) oraz (3.5.3), nie mogą być spełnione nierówności $n_1, n_2, \dots, n_q < \lfloor \frac{n}{q} \rfloor$ ani $n_1, n_2, \dots, n_q > \lfloor \frac{n}{q} \rfloor$. Stąd oraz z warunku (3.5.5) wynika, że zachodzi jeden z poniższych przypadków:

$$n_1, n_2, \dots, n_q \in \begin{cases} \left\{ \lfloor \frac{n}{q} \rfloor - 2, \lfloor \frac{n}{q} \rfloor - 1, \lfloor \frac{n}{q} \rfloor \right\} & \text{dla liczby parzystej } \lfloor \frac{n}{q} \rfloor, \\ \left\{ \lfloor \frac{n}{q} \rfloor - 1, \lfloor \frac{n}{q} \rfloor, \lfloor \frac{n}{q} \rfloor + 1 \right\} & \text{dla liczby nieparzystej } \lfloor \frac{n}{q} \rfloor, \\ \left\{ \lfloor \frac{n}{q} \rfloor, \lfloor \frac{n}{q} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n}{q} \rfloor + 2 \right\} & \text{dla liczby parzystej } \lfloor \frac{n}{q} \rfloor. \end{cases} \quad (3.5.6)$$

Jeśli $\lfloor \frac{n}{q} \rfloor$ jest liczbą parzystą, $n_1, n_2, \dots, n_q \in \left\{ \lfloor \frac{n}{q} \rfloor - 2, \lfloor \frac{n}{q} \rfloor - 1, \lfloor \frac{n}{q} \rfloor \right\}$ oraz istnieje indeks i , dla którego $n_i < \lfloor \frac{n}{q} \rfloor$, to

$$n_1 + n_2 + \dots + n_q < q \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \leq n.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność z tym, że ciąg $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ wyznacza podalgebrę $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Zatem możemy ograniczyć się do drugiego i trzeciego przypadku z formuły (3.5.6).

Jeśli $\lfloor \frac{n}{q} \rfloor$ jest liczbą nieparzystą oraz $n_1, n_2, \dots, n_q \in \left\{ \lfloor \frac{n}{q} \rfloor - 1, \lfloor \frac{n}{q} \rfloor, \lfloor \frac{n}{q} \rfloor + 1 \right\}$, wtedy istnieją liczby $a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ spełniające równość $a + b + c = q$ oraz permutacja σ zbioru $\{1, 2, \dots, q\}$, dla których

$$(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, \dots, n_{\sigma(q)}) = \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor - 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor - 1 \right)}_{a \text{ razy}} \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)}_{b \text{ razy}} \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right)}_{c \text{ razy}}.$$

Ponieważ $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$, to

$$a \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor - 1 \right) + b \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + c \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right) = (a + b + c) \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor - a + c = q \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor - a + c = n.$$

Stąd $c = n - q \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + a = r + a$, natomiast $b = q - a - c = q - r - 2a$. Liczba b jest naturalna, więc z ostatniej równości wynika nierówność $a \leq \left\lfloor \frac{q-r}{2} \right\rfloor$. Pokazaliśmy, że przyjmując za t liczbę a , ciąg $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ spełnia warunek b).

Podobnie pokazujemy, że jeśli $n_1, n_2, \dots, n_q \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 2 \right\}$, gdzie $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$ jest liczbą parzystą, to spełniony jest warunek a). Zatem zakończyliśmy dowód. $\square$

Przykład 3.5.6. Niech $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ będzie ciągiem liczb naturalnych takich, że $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$, który wyznacza D_5 podalgebrę $M_{14}(K)$ III typu. Wówczas stosując oznaczenia z Twierdzenia 3.5.5, mamy $n = 14$, $q = 5$, $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor = 2$, $r = 4$. Zatem na mocy podpunktu a) tego twierdzenia ciąg $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ jest równy

$$(2, 3, 3, 3, 3), \quad (2, 2, 3, 3, 4) \quad \text{lub} \quad (2, 2, 2, 4, 4). \quad (3.5.7)$$

Jeśli nie będziemy zakładali, że $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$, to otrzymamy odpowiednio 4 , $\frac{5!}{2! \cdot 2!} - 1 = 29$ lub $\frac{5!}{3! \cdot 2!} - 1 = 9$ dodatkowych ciągów, którym może być równy ciąg $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$.

Założmy, że ciąg $(n_1, n_2, \dots, n_7)$, gdzie $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_7$, wyznacza D_7 podalgebrę $M_{22}(K)$ III typu. W tym przypadku liczby występujące w Twierdzeniu 3.5.5 to $n = 22$, $q = 7$, $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor = 3$, $r = 1$. Wtedy na mocy podpunktu b) tego twierdzenia ciąg $(n_1, n_2, \dots, n_7)$ jest równy

$$(3, 3, 3, 3, 3, 3, 4), \quad (2, 3, 3, 3, 3, 4, 4), \quad (2, 2, 3, 3, 4, 4, 4) \quad \text{lub} \quad (2, 2, 2, 4, 4, 4, 4).$$

Nie zakładając nierówności pomiędzy liczbami $n_1, n_2, \dots, n_q$, otrzymujemy odpowiednio 6 , $\frac{7!}{4! \cdot 2!} - 1 = 104$, $\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} - 1 = 209$ lub $\frac{7!}{3! \cdot 4!} - 1 = 34$ dodatkowych możliwości na ciąg $(n_1, n_2, \dots, n_7)$.

Na mocy Wniosku 3.2.6 każda D_q podalgebra $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru jest sprzężona z D_q podalgebrą $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu. Zatem korzystając z Twierdzenia 3.3.6 otrzymujemy, że klasy sprzężoności D_q podalgebr $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru są wyznaczone przez pewne ciągi liczb naturalnych $(n_1, n_2, \dots, n_q)$, dla których $\sum_{i=1}^q n_i = n$ oraz ciągi $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_q)$ przemienne podalgebr maksymalnych wymiarów odpowiednio algebr $M_{n_1}(K), M_{n_2}(K), \dots, M_{n_q}(K)$.

Założmy, że K jest ciałem algebraicznie domkniętym. Wtedy z Twierdzenia 3.4.7 wynika, że klasy sprzężoności oraz klasy algebr izomorficznych wśród D_q podalgebr $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru są takie same. Co więcej, z Wniosku 2.1.9 za ciągi $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_q)$ zdefiniowane we wcześniejszym akapicie możemy przyjąć ciągi

$$(C_{n_1}^{t_1}(K), C_{n_2}^{t_2}(K), \dots, C_{n_q}^{t_q}(K)),$$

gdzie przez $C_{n_i}^{t_i}(K)$ dla $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ oraz liczby naturalnej t_i zależnej od n_i , oznaczamy przemienne podalgebrę $M_{n_i}(K)$ maksymalnego wymiaru określoną w Przykładzie 2.1.2, jeśli $n_i \in \{1, 4, 5, \dots\}$ oraz określoną w Stwierdzeniu 2.1.8, jeśli $n_i \in \{2, 3\}$. Na przykład, klasy sprzężoności jak i klasy algebr izomorficznych wśród D_5 podalgebr $M_{14}(K)$ maksymalnych wymiarów wyznaczone są przez permutacje ciągów z formuły (3.5.7) oraz zależne od nich ciągi algebr, w których występuje dokładnie 5 algebr spośród

$$C_2^1(K), C_2^2(K), C_3^1(K), C_3^2(K), C_3^3(K), C_3^4(K), C_3^5(K), C_4^1(K).$$

Wniosek 3.5.7. Niech n_1, n_2 oraz n będą liczbami naturalnymi takimi, że $n_1 + n_2 = n$. Ciąg (n_1, n_2) wyznacza D_2 podalgebrę $M_n(K)$ III typu wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków:

- a) liczba n jest nieparzysta i $(n_1, n_2) \in \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right), \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \right\}$,
- b) $n = 2$ i $(n_1, n_2) = (1, 1)$,
- c) liczba n jest podzielna przez 4 i $(n_1, n_2) = \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)$,
- d) $n \neq 2$, reszta z dzielenia liczby n przez 4 jest równa 2 i

$$(n_1, n_2) \in \left\{ \left(\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1 \right), \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right), \left(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} - 1 \right) \right\}.$$

Dowód. Niech (n_1, n_2) będzie ciągiem liczb naturalnych, dla których $n_1 + n_2 = n$ oraz spełniony jest warunek a), b), c) lub d). Gdy pokażemy, że ciąg (n_1, n_2) wyznacza D_2 podalgebrę $M_n(K)$ III typu, to zakończymy dowód jednej z implikacji. W tym celu sprawdzimy, że istnieje permutacja σ zbioru $\{1, 2\}$, dla której prawdziwy jest jeden z warunków w Twierdzeniu 3.5.5. Ze względu na to, że dowód w każdym z czterech przypadków jest podobny, ograniczymy się do sytuacji, w których spełnione są warunki a) lub d) z wniosku.

Założmy, że ciąg (n_1, n_2) spełnia warunek a) z wniosku. Wtedy liczba n jest nieparzysta. Jeśli dodatkowo liczba $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ jest parzysta, to warunek a) z Twierdzenia 3.5.5 jest spełniony:

- dla permutacji $\sigma = id$ oraz liczby $s = 0$, jeśli $(n_1, n_2) = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right)$,
- dla permutacji $\sigma = (12)$ oraz liczby $s = 0$, jeśli $(n_1, n_2) = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)$.

Gdy liczba $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ jest nieparzysta, to podobnie sprawdzamy, że spełniony jest warunek b) z Twierdzenia 3.5.5.

Założmy teraz, że ciąg (n_1, n_2) spełnia warunek d) z wniosku. Wtedy z założeń, które dotyczą liczby n wynika, że jest ona parzysta, a liczba $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$ jest nieparzysta. Zatem warunek b) z Twierdzenia 3.5.5 jest spełniony:

- dla permutacji $\sigma = id$ oraz liczby $t = 1$, jeśli $(n_1, n_2) = \left(\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1 \right)$,

- dla permutacji $\sigma = id$ oraz liczby $t = 0$, jeśli $(n_1, n_2) = (\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$,
- dla permutacji $\sigma = (12)$ oraz liczby $t = 1$, jeśli $(n_1, n_2) = (\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} - 1)$.

Aby zakończyć dowód, pokażemy przeciwną implikację. Załóżmy więc, że ciąg liczb naturalnych (n_1, n_2) , gdzie $n_1 + n_2 = n$, wyznacza D_2 podalgebrę $M_n(K)$ III typu. Niech r będzie resztą z dzielenia liczby n przez 2. Wtedy $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor = 0$, a $\lfloor \frac{2-r}{2} \rfloor \in \{0, 1\}$. Zatem na mocy Twierdzenia 3.5.5 dostajemy, że ciąg (n_1, n_2) jest równy:

$$\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \text{ lub } \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right), \quad \text{jeśli liczba } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ jest nieparzysta i } r = 0,$$

$$\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \text{ lub } \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), \quad \text{jeśli liczba } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ jest nieparzysta i } r = 1,$$

$$\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \quad \text{jeśli liczba } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ jest parzysta i } r = 0,$$

$$\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \text{ lub } \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), \quad \text{jeśli liczba } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ jest parzysta i } r = 1.$$

Gdy spełniona jest pierwsza z powyższych równości, to zachodzi warunek *b)* lub *d)*. Gdy spełniona jest druga lub ostatnia z równości, wtedy spełniony jest warunek *a)*. Natomiast z trzeciej równości wynika warunek *c)*. To kończy dowód drugiej implikacji. $\square$

Przykład 3.5.8. Z Wniosku 3.5.7 wynika, że jedynie pary $(2, 3)$ i $(3, 2)$ wyznaczają D_2 podalgebry $M_5(K)$ III typu. Zatem

$$K(e_{11} + e_{22}) + K(e_{33} + e_{44} + e_{55}) + \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & K & K \\ \hline 0 & 0 & 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$K(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + K(e_{44} + e_{55}) + \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & K & K \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

są przykładami D_2 podalgebr $M_5(K)$ III typu. Ich diagonalne bloki są równe odpowiednio algebr $C_2^1(K)$, $C_3^1(K)$ i $C_3^2(K)$, $C_2^1(K)$, które rozpatrywaliśmy wcześniej. W akapicie poprzedzającym Wniosek 3.5.7 opisaliśmy klasy sprzężoności oraz klasy algebr izomorficznych wśród D_5 podalgebr $M_{14}(K)$ maksymalnego wymiaru, gdy K jest ciałem algebraicznie domkniętym. Podobnie, wykorzystując dodatkowo algebry $C_2^2(K)$, $C_3^3(K)$, $C_3^4(K)$ oraz $C_3^5(K)$, możemy scharakteryzować z dokładnością do sprzężeń jak i izomorfizmów D_2 podalgebry $M_5(K)$ maksymalnego wymiaru, jeśli K jest ciałem algebraicznie domkniętym.

Z zastosowanego wcześniej wniosku wynika, że jedynie pary $(2, 4)$, $(3, 3)$ i $(4, 2)$ wyznaczają D_2 podalgebry $M_6(K)$ III typu. Pozwalają one scharakteryzować klasy sprzężoności oraz klasy algebr izomorficznych wśród D_2 podalgebr $M_6(K)$ maksymalnego wymiaru, jeśli ciało K jest algebraicznie domknięte.

Rozdział 4

D_q podalgebry $U_n(K)$ i zanurzenia D_q podalgebr $M_n(K)$

W tym rozdziale pokażemy, że dowolna maksymalna D_q podalgebra $M_n(K)$, która zawiera się w algebrze $U_n(K)$, jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu. Pozwoli to odpowiedzieć negatywnie na pytanie [50, Question 9], które przy przyjętych przez nas definicjach jest następujące: Czy istnieje D_2 podalgebra $U_n(K)$ maksymalnego wymiaru, która nie jest D_2 podalgebrą $M_n(K)$ pewnego kształtu (n_1, n_2) III typu?

Następnie, dla dowolnych liczb naturalnych q, t spełniających nierówności $1 \leq t \leq q - 2$, będziemy badać zanurzenia maksymalnych D_{q-t} podalgebr $M_n(K)$ w maksymalne D_q podalgebry $M_n(K)$. We Wniosku 4.2.3 pokażemy, że takie zanurzenie istnieje, jeśli ciało K jest algebraicznie domknięte. Wskażemy także przykład maksymalnej D_2 podalgebry $M_3(\mathbb{R})$, która nie zanurza się w maksymalną D_3 podalgebrę $M_3(\mathbb{R})$ (patrz Stwierdzenie 4.2.5).

Jeśli maksymalna D_{q-t} podalgebra $M_n(K)$ zanurza się w maksymalną D_q podalgebrę $M_n(K)$, gdzie $1 \leq t \leq q - 2$, i obie algebry zawierają się w algebrze $U_n(K)$, to są one blokowo trójkątne. Motywuje to badanie zanurzeń D_{q-t} podalgebr $M_n(K)$ I typu w D_q podalgebry $M_n(K)$ I typu, które są zgodne ze strukturą blokową. Warunki konieczne i dostateczne na to, aby takie zanurzenie istniało, podamy w Twierdzeniu 4.2.13.

Ostatni podrozdział tego rozdziału dotyczy jednoznaczności przedstawienia D_q podalgebr $M_n(K)$ w postaci blokowej.

4.1 D_q podalgebry $U_n(K)$

W tym podrozdziale opiszemy maksymalne D_q podalgebry $M_n(K)$ zawarte w algebrze $U_n(K)$. Zaczniemy od lematu, który pozwoli nam dokładniej scharakteryzować D_q podalgebry $M_n(K)$ maksymalnych wymiarów dla ciała algebraicznie domkniętego K .

Przez $C_t^i(K)$, dla liczby naturalnej t oraz zależnej od niej liczby naturalnej i , będziemy

oznaczali przemianą podalgebrę $M_t(K)$ maksymalnego wymiaru, określoną w Przykładzie 2.1.2 (dla $t \in \{1, 4, 5, \dots\}$) lub w Stwierdzeniu 2.1.8 (dla $t \in \{2, 3\}$).

Lemat 4.1.1. *Niech $\mathcal{A}$ będzie przemianą podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru:*

- równą $C_n^1(K)$, jeśli liczba n jest parzysta,
- równą $C_n^1(K)$ albo $C_n^2(K)$, jeśli liczba n jest nieparzysta, większa lub równa 3.

Wówczas dla dowolnej macierzy odwracalnej $X \in M_n(K)$ takiej, że $X^{-1}\mathcal{A}X \subseteq U_n(K)$ algebry $X^{-1}\mathcal{A}X$ oraz $\mathcal{A}$ są równe.

Dowód. Niezależnie od parzystości liczby n algebra $\mathcal{A}$ zawiera zbiór

$$\begin{pmatrix} 0_{n_1} & M_{n_1 \times n_2}(K) \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix},$$

gdzie n_1, n_2 są pewnymi liczbami naturalnymi takimi, że $n_1 + n_2 = n$. Ponieważ $X^{-1}\mathcal{A}X \subseteq U_n(K)$, a $U_n(K)$ zawiera się w pełnej podalgebrze $M_n(K)$ kształtu (n_1, n_2) , to algebra $\mathcal{A}$ oraz macierz X spełniają założenia Lematu 3.3.3. Wynika z niego, że X jest macierzą blokowo trójkątną równą $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0_{n_2 \times n_1} & X_{22} \end{pmatrix}$ dla pewnych $X_{11} \in M_{n_1}(K)$, $X_{12} \in M_{n_1 \times n_2}(K)$, $X_{22} \in M_{n_2}(K)$. Ponieważ X jest macierzą odwracalną, to z Lematu 3.3.2 macierze X_{11} oraz X_{22} są odwracalne i istnieje macierz $X'_{12} \in M_{n_1 \times n_2}(K)$ taka, że

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11}^{-1} & X'_{12} \\ 0_{n_2 \times n_1} & X_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Niech $A = aI_n + \begin{pmatrix} 0_{n_1} & A_{12} \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix}$, gdzie $a \in K$, $A_{12} \in M_{n_1 \times n_2}(K)$, będzie dowolną macierzą podalgebry $\mathcal{A}$. Wtedy

$$\begin{aligned} X^{-1}AX &= \begin{pmatrix} X_{11}^{-1} & X'_{12} \\ 0_{n_2 \times n_1} & X_{22}^{-1} \end{pmatrix} \left(aI_n + \begin{pmatrix} 0_{n_1} & A_{12} \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0_{n_2 \times n_1} & X_{22} \end{pmatrix} \\ &= aI_n + \begin{pmatrix} 0_{n_1} & X_{11}^{-1}A_{12}X_{22} \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Stąd dostajemy zawieranie $X^{-1}\mathcal{A}X \subseteq \mathcal{A}$. Podobnie sprawdzamy, że $X\mathcal{A}X^{-1} \subseteq \mathcal{A}$. Z tych zawierania wynika, że

$$\mathcal{A} = X^{-1}(X\mathcal{A}X^{-1})X \subseteq X^{-1}\mathcal{A}X \subseteq \mathcal{A}.$$

To pokazuje, że algebry $\mathcal{A}$ oraz $X^{-1}\mathcal{A}X$ są równe, co kończy dowód. □

Niech n będzie dowolną liczbą nieparzystą, większą lub równą 3. Wtedy $C_n^1(K)$ i $C_n^2(K)$ są różnymi podalgebrami $U_n(K)$. Zatem z Lematu 4.1.1 wynika następujący wniosek.

Wniosek 4.1.2. Jeśli n jest liczbą nieparzystą większą lub równą 3, to podalgebry $C_n^1(K)$ i $C_n^2(K)$ algebry $M_n(K)$ nie są sprzężone.

Dla podalgebry $\mathcal{A}$ i macierzy X spełniających założenia Lematu 4.1.1 może istnieć macierz $A \in \mathcal{A}$ taka, że $X^{-1}AX \neq A$. Nie jest to sprzeczne z równością algebr $X^{-1}\mathcal{A}X$ oraz $\mathcal{A}$. Na przykład, gdy

$$\mathcal{A} = C_2^1(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in K \right\}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

gdzie K jest ciałem charakterystyki różnej od 2, to

$$X^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nie jest trudno sprawdzić, że rozważając dowolną algebrę $\mathcal{A}$ spośród algebr $C_2^2(K)$, $C_3^3(K)$, $C_3^4(K)$ i $C_3^5(K)$ nie zachodzi dla $\mathcal{A}$ odpowiednik Lematu 4.1.1. Pokażemy to poniżej.

Przykład 4.1.3. Rozpatrzmy podalgebrę

$$\mathcal{A} = C_2^2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in K \right\}$$

algebry $M_2(K)$ i macierz odwracalną $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wtedy, dla dowolnych $a, b \in K$

$$X^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że $X^{-1}\mathcal{A}X \subseteq U_2(K)$. Algebry $\mathcal{A}$ oraz $X^{-1}\mathcal{A}X$ są różne, ponieważ macierz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ należy do $X^{-1}\mathcal{A}X$, ale nie należy do $\mathcal{A}$.

Podobnie, gdy $\mathcal{A} = C_3^3(K)$, $\mathcal{A} = C_3^4(K)$ lub $\mathcal{A} = C_3^5(K)$, to znajdziemy macierz odwracalną $X \in M_3(K)$, dla której $X^{-1}\mathcal{A}X \subseteq U_3(K)$, ale algebry $\mathcal{A}$ oraz $X^{-1}\mathcal{A}X$ są różne.

Twierdzenie 4.1.4. *Założmy, że $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $U_n(K)$.*

- a) *Jeśli dodatkowo $\mathcal{A}$ jest maksymalną D_q podalgebrą $M_n(K)$, to $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu.*
- b) *Jeśli dodatkowo $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru, to $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu.*
- c) *Jeśli dodatkowo $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ III typu, której kolejnymi diagonalnymi blokami są $\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22}, \dots, \mathcal{A}_{qq}$ oraz ciało K jest algebraicznie domknięte, to dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ spełniony jest jeden z poniższych warunków:*

- *blok $\mathcal{A}_{ii}$ jest równy $C_{n_i}^1(K)$,*
- *liczba n_i jest nieparzysta, większa lub równa 3 oraz blok $\mathcal{A}_{ii}$ jest równy $C_{n_i}^2(K)$,*

– blok $\mathcal{A}_{ii}$ jest sprzężony z $C_2^2(K)$, $C_3^3(K)$, $C_3^4(K)$ lub $C_3^5(K)$.

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{A}$ jest maksymalną D_q podalgebrą $M_n(K)$ zawartą w algebrze $U_n(K)$. Na mocy Twierdzenia 3.2.5 istnieje macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ taka, że $X^{-1}\mathcal{A}X$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu. Ponieważ algebra $\mathcal{A}$ zawiera się w $U_n(K)$ oraz algebra $U_n(K)$ zawiera się w pełnej podalgebrze $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$, to $\mathcal{A}$ zawiera się w pełnej podalgebrze $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Zatem do podalgebry $X^{-1}\mathcal{A}X$ oraz macierzy X^{-1} możemy zastosować Stwierdzenie 3.3.5. Wynika z niego, że algebra $X(X^{-1}\mathcal{A}X)X^{-1} = \mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu. To kończy dowód podpunktu a).

Założmy teraz, że $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru, która zawiera się w algebrze $U_n(K)$. Z pokazanego podpunktu wynika, że $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu. Niech $\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22}, \dots, \mathcal{A}_{qq}$ będą jej diagonalnymi blokami. Jeśli dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ blok $\mathcal{A}_{ii}$ nie jest przemianą podalgebrą $M_{n_i}(K)$ maksymalnego wymiaru, to zastępując w algebrze $\mathcal{A}$ blok $\mathcal{A}_{ii}$ algebrą $C_{n_i}^1(K)$, otrzymujemy D_q podalgebrę $M_n(K)$ większego wymiaru niż $\mathcal{A}$. Jest to sprzeczne z tym, że $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru. Zatem dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ blok $\mathcal{A}_{ii}$ jest przemianą podalgebrą $M_{n_i}(K)$ maksymalnego wymiaru. To pokazuje, że $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu. Zatem podpunkt b) został udowodniony.

Aby zakończyć dowód, załóżmy, że K jest ciałem algebraicznie domkniętym. Niech $\mathcal{A}$ będzie D_q podalgebrą $M_n(K)$ III typu z diagonalnymi blokami $\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22}, \dots, \mathcal{A}_{qq}$, która zawiera się w algebrze $U_n(K)$. Dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ blok $\mathcal{A}_{ii}$ jest przemianą podalgebrą $M_{n_i}(K)$ maksymalnego wymiaru. Zatem z Wniosku 2.1.9 istnieje macierz odwracalna $X_{ii} \in M_{n_i}(K)$ taka, że $X_{ii}^{-1}\mathcal{A}_{ii}X_{ii} = C_{n_i}^{t_i}(K)$ dla pewnej liczby naturalnej t_i . Ponieważ $\mathcal{A} \subseteq U_n(K)$, to $X_{ii}C_{n_i}^{t_i}X_{ii}^{-1} = \mathcal{A}_{ii} \subseteq U_{n_i}(K)$. Jeśli $t_i = 1$, to na mocy Lematu 4.1.1 dostajemy równość $\mathcal{A}_{ii} = C_{n_i}^{t_i}(K)$. Wtedy spełniony jest pierwszy warunek z podpunktu c). Podobnie sprawdzamy, że dla innych wartości liczby t_i spełniony jest drugi lub trzeci warunek z podpunktu c). To kończy dowód. $\square$

Maksymalny wymiar D_q podalgebry $M_n(K)$ jest równy wymiarowi dowolnej D_q podalgebry $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu. Jedną z takich podalgebr jest D_q podalgebra $M_n(K)$ III typu z diagonalnymi blokami $C_{n_1}^1(K), C_{n_2}^1(K), \dots, C_{n_q}^1(K)$. Ta podalgebra zawiera się w algebrze macierzy górnotrójkątnych. Stąd wynika, że D_q podalgebra $U_n(K)$ maksymalnego wymiaru jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru zawartą w algebrze $U_n(K)$. Zatem korzystając z Twierdzenia 4.1.4, dostajemy następujący wniosek.

Wniosek 4.1.5. Niech $\mathcal{A}$ będzie D_q podalgebrą $U_n(K)$ maksymalnego wymiaru. Wtedy $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu.

4.2 Zanurzenia D_{q-1} algebr I typu w D_q algebry

W tym podrozdziale, dla dowolnych liczb naturalnych q, t spełniających nierówności $1 \leq t \leq q-2$, będziemy badali różne zanurzenia maksymalnych D_{q-t} podalgebr $M_n(K)$ w maksymalne D_q podalgebry $M_n(K)$.

Analizę zaczniemy od przypadku, w którym $t = 1$ oraz ciało K jest algebraicznie domknięte. Wtedy na mocy Twierdzenia 1.0.16 dowolna maksymalna D_{q-1} podalgebra $\mathcal{A}$ algebry $M_n(K)$ jest triangularyzowalna. Istnieje więc macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ taka, że $X^{-1}\mathcal{A}X \subseteq U_n(K)$. Ponieważ $U_n(K)$ jest D_n podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru, to podalgebra z nią sprzężona też ma te własności. Zatem algebra $\mathcal{A}$ zawiera się w maksymalnej D_n podalgebrze $M_n(K)$ równej $XU_n(K)X^{-1}$. Następny lemat wykorzystamy do znalezienia maksymalnej D_q podalgebry $M_n(K)$, w której zawiera się $\mathcal{A}$.

Lemat 4.2.1. *Niech q i n będą liczbami naturalnymi spełniającymi nierówności $3 \leq q \leq n$. Niech $\mathcal{A}$ będzie D_{q-1} podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{q-1})$ I typu, która zawiera się w algebrze $U_n(K)$. Wtedy istnieje maksymalna D_q podalgebra $\mathcal{B}$ algebry $M_n(K)$ zawierająca właściwie $\mathcal{A}$.*

Dowód. Ponieważ $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{q-1})$, to $\sum_{i=1}^{q-1} n_i = n$. Stąd oraz z nierówności $q \leq n$ wynika, że istnieje indeks $i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ taki, że $n_i \geq 2$. Niech $\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22}, \dots, \mathcal{A}_{q-1, q-1}$ będą diagonalnymi blokami $\mathcal{A}$, które wynikają z tego, że $\mathcal{A}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{q-1})$ I typu. Ponieważ algebra $\mathcal{A}$ zawiera się w $U_n(K)$, to blok $\mathcal{A}_{ii}$ zawiera się w $U_{n_i}(K)$. Zatem dowolną macierz $A \in \mathcal{A}_{ii}$ możemy zapisać w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0_{1 \times (n_i-1)} & a_{22} \end{pmatrix},$$

gdzie $A_{11} \in U_{n_i-1}(K)$, $A_{12} \in M_{(n_i-1) \times 1}(K)$, $a_{22} \in K$. Rozpatrzmy podalgebrę $\mathcal{D}$ algebry $U_{n_i-1}(K)$ określoną wzorem

$$\mathcal{D} = \left\{ A_{11} : \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0_{1 \times (n_i-1)} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{ii}, \text{ gdzie } A_{11} \in U_{n_i-1}(K), A_{12} \in M_{(n_i-1) \times 1}(K), a_{22} \in K \right\}.$$

Tak określona podalgebra jest przemienna, ponieważ $\mathcal{A}_{ii}$ jest algebrą przemienną. Niech $\mathcal{B}_{ii}$ będzie maksymalną przemienną podalgebrą $M_{n_i-1}(K)$ zawierającą $\mathcal{D}$. Za podalgebrę $\mathcal{B}$, która spełnia tezę lematu, możemy przyjąć D_q podalgebrę $M_n(K)$ kształtu

$$(n_1, \dots, n_{i-1}, n_i - 1, 1, n_{i+1}, \dots, n_{q-1})$$

I typu z diagonalnymi blokami równymi

$$\mathcal{A}_{11}, \dots, \mathcal{A}_{i-1, i-1}, \mathcal{B}_{ii}, K, \mathcal{A}_{i+1, i+1}, \dots, \mathcal{A}_{q-1, q-1}.$$

Istotnie, na mocy Twierdzenia 3.1.2 jest to maksymalna D_q podalgebra $M_n(K)$. Ponadto zawiera ona algebrę $\mathcal{A}$, bo powstała z niej przez zamianę bloku $\mathcal{A}_{ii}$ na

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{ii} & M_{(n_i-1) \times 1}(K) \\ 0_{1 \times (n_i-1)} & K \end{pmatrix}$$

i zachowanie pozostałych bloków algebry $\mathcal{A}$. Zawieranie jest właściwe, ponieważ $\mathcal{A}_{ii}$ jest algebrą przemienną, a powyższa algebra jest nieprzemienna. To kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 4.2.2. *Niech q i n będą liczbami naturalnymi spełniającymi nierówności $3 \leq q \leq n$. Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech $\mathcal{A}$ będzie maksymalną D_{q-1} podalgebrą $M_n(K)$. Wtedy istnieje maksymalna D_q podalgebra $\mathcal{B}$ algebry $M_n(K)$, która zawiera właściwie $\mathcal{A}$.*

Dowód. Na mocy Twierdzenia 1.0.16 D_q podalgebra $\mathcal{A}$ algebry $M_n(K)$, dla ciała algebraicznie domkniętego K , jest triangularyzowalna. Istnieje więc macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ taka, że $X^{-1}\mathcal{A}X \subseteq U_n(K)$. Ponieważ $\mathcal{A}$ jest maksymalną D_{q-1} podalgebrą $M_n(K)$, to $X^{-1}\mathcal{A}X$ jest też maksymalną D_{q-1} podalgebrą $M_n(K)$. Zatem z Twierdzenia 4.1.4 $X^{-1}\mathcal{A}X$ jest D_{q-1} podalgebrą $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{q-1})$ I typu. Algebra $X^{-1}\mathcal{A}X$ spełnia założenia Lematu 4.2.1, więc istnieje maksymalna D_q podalgebra $\mathcal{B}'$ algebry $M_n(K)$ zawierająca właściwie $X^{-1}\mathcal{A}X$. Za szukaną podalgebrą $\mathcal{B}$ możemy przyjąć $X\mathcal{B}'X^{-1}$, co kończy dowód. $\square$

Wniosek 4.2.3. *Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech t, n, q będą liczbami spełniającymi nierówności $3 \leq q \leq n, 1 \leq t < q - 1$. Wtedy dla dowolnej maksymalnej D_{q-t} podalgebry $\mathcal{A}$ algebry $M_n(K)$ istnieje maksymalna D_q podalgebra $\mathcal{B}$ algebry $M_n(K)$, która zawiera właściwie $\mathcal{A}$.*

Dowód. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną maksymalną D_{q-t} podalgebrą $M_n(K)$, gdzie liczby q, n, t spełniają nierówności z wniosku oraz założymy, że ciało K jest algebraicznie domknięte. Na mocy nierówności $t < q - 1$ dostajemy, że $3 \leq q - t + 1$, a z nierówności $q \leq n$ oraz $1 \leq t$ otrzymujemy, że $q - t + 1 \leq n$. Zatem do algebry $\mathcal{A}$ możemy zastosować Twierdzenie 4.2.2. Z niego istnieje maksymalna D_{q-t+1} podalgebra $\mathcal{B}_1$ algebry $M_n(K)$, która zawiera właściwie $\mathcal{A}$. Jeśli $t = 1$, to przyjmujemy $\mathcal{B}_1$ za szukaną podalgebrą $\mathcal{B}$. W przeciwnym przypadku spełniona jest nierówność $t > 1$. Powtarzając wcześniejsze rozumowanie, znajdujemy podalgebry $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \dots, \mathcal{B}_t$ algebry $M_n(K)$ takie, że $\mathcal{B}_i$ jest maksymalną D_{q-t+i} podalgebrą $M_n(K)$ dla dowolnego $i \in \{2, \dots, t\}$ oraz $\mathcal{B}_2 \subsetneq \mathcal{B}_3 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{B}_t$. Za szukaną podalgebrą $\mathcal{B}$ możemy przyjąć $\mathcal{B}_t$. $\square$

W Stwierdzeniu 4.2.5 wskażemy przykład algebry, który uzasadni, że w Twierdzeniu 4.2.2 założenie o ciele K jest istotne. Dowód tego stwierdzenia poprzedzimy obserwacją dotyczącą przemiennej podalgebry $M_2(K)$, którą rozpatrywaliśmy wcześniej w Przykładzie 1.0.4. Pokażemy, że jest ona maksymalną właściwą podalgebrą $M_2(\mathbb{R})$. Maksymalny wymiar właściwej podalgebry $M_n(K)$ dla dowolnej liczby n naturalnej oraz dowolnego ciała K charakterystyki 0 znaleziono w [2].

Lemat 4.2.4. *Określmy następujący podzbiór algebry $M_2(\mathbb{R})$*

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wtedy $\mathcal{C}$ jest maksymalną właściwą podalgebrą $M_2(\mathbb{R})$.

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że $\mathcal{C}$ nie jest maksymalną właściwą podalgebrą $M_2(\mathbb{R})$. Istnieje wtedy podalgebra $\mathcal{M}$ algebry $M_2(\mathbb{R})$ taka, że $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq M_2(\mathbb{R})$. Ponieważ $\mathcal{M}$ zawiera właściwie $\mathcal{C}$, to istnieje macierz $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{C}$. Wtedy także do zbioru $\mathcal{M} \setminus \mathcal{C}$ należy macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{12} + x_{21} & x_{22} - x_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ -x_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Zatem $x_{12} + x_{21} \neq 0$ lub $x_{22} - x_{11} \neq 0$.

Założmy najpierw, że $x_{12} + x_{21} \neq 0$. Wówczas

$$(x_{12} + x_{21})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{12} + x_{21} & x_{22} - x_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{x_{22}-x_{11}}{x_{12}+x_{21}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}.$$

Ponieważ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \subsetneq \mathcal{M}$, to do algebry $\mathcal{M}$ należy również macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{x_{22}-x_{11}}{x_{12}+x_{21}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{x_{22}-x_{11}}{x_{12}+x_{21}} \end{pmatrix}.$$

Standardowymi metodami algebry liniowej sprawdzamy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej y macierze

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tworzą bazę przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$. Stąd wynika, że $\mathcal{M} = M_2(\mathbb{R})$. Otrzymaliśmy sprzeczność z określeniem algebry $\mathcal{M}$.

Aby zakończyć dowód, wystarczy rozpatrzyć sytuację, w której $x_{12} + x_{21} = 0$. Wtedy $x_{22} - x_{11} \neq 0$, więc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x_{22} - x_{11})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_{22} - x_{11} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}.$$

Stąd $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ i następnie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}.$$

To pokazuje, że $\mathcal{M} = M_2(\mathbb{R})$. Jak wcześniej otrzymaliśmy sprzeczność, co kończy dowód. $\square$

Stwierdzenie 4.2.5. *Niech*

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & a & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} : a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wtedy $\mathcal{A}$ jest maksymalną D_2 podalgebrą $M_3(\mathbb{R})$, ale nie istnieje D_3 podalgebra $\mathcal{B}$ algebry $M_3(\mathbb{R})$, która zawiera właściwie $\mathcal{A}$.

Dowód. W Lemacie 4.2.4 pokazaliśmy, że $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ jest maksymalną właściwą podalgebrą $M_2(\mathbb{R})$. Ponieważ $\mathcal{C}$ jest algebrą przemenną, to jest ona maksymalną przemenną podalgebrą $M_2(\mathbb{R})$. Stąd wynika, że $\mathcal{A}$ jest D_2 podalgebrą $M_3(\mathbb{R})$ kształtu $(2, 1)$ I typu, więc na mocy Twierdzenia 3.1.2 $\mathcal{A}$ jest maksymalną D_2 podalgebrą $M_3(\mathbb{R})$. Pokażemy, że nie istnieje D_3 podalgebra $\mathcal{B}$ algebry $M_3(\mathbb{R})$, która zawiera właściwie $\mathcal{A}$. Załóżmy przeciwnie, że taka podalgebra $\mathcal{B}$ istnieje. Wtedy do $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ należy pewna macierz

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}. \text{ Ponieważ}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{A}, \quad \text{to również} \quad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}.$$

Sprawdźmy, że $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$. Istotnie, w przeciwnym przypadku podalgebra $M_2(\mathbb{R})$ generowana przez macierze $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ jest równa $M_2(\mathbb{R})$, bo $\mathcal{C}$ jest maksymalną właściwą podalgebrą $M_2(K)$. Zatem do podalgebry $M_3(\mathbb{R})$ generowanej przez macierze

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

która zawiera się w $\mathcal{B}$, należą macierze

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ y'_1 & y'_2 & 0 \end{pmatrix}$$

dla pewnych $y_1, y'_1, y_2, y'_2 \in \mathbb{R}$. Macierze Y i Y' spełniają zależność

$$[Y, Y']^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ y_2 & -y'_1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ y_2 & -y'_1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_3.$$

To przeczy założeniu, że $\mathcal{B}$ jest D_3 algebrą. Pokazaliśmy, że $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$. Z dowolności wyboru macierzy X , która należy do $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$, wynika zawieranie

$$\mathcal{B} \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & -b & c \\ b & a & d \\ e & f & g \end{pmatrix} : a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R} \right\}. \quad (4.2.1)$$

Jeśli $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ jest dowolną macierzą algebry $\mathcal{B}$, to z zawierania algebry $\mathcal{A}$ w $\mathcal{B}$ wynika, że

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}.$$

Zatem z formuły (4.2.1) otrzymujemy, że wyrazy b_{31} oraz b_{32} są zerowe. Stąd oraz ze wspomnianej formuły wnioskujemy równość algebr $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Uzyskałismy sprzeczność z tym, że algebra $\mathcal{B}$ zawiera właściwie $\mathcal{A}$. To kończy dowód. $\square$

Na potrzeby tego podrozdziału wprowadzimy następujące definicje.

Definicja 4.2.6. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną podalgebrą $M_n(K)$. Natomiast niech $\mathcal{B}$ będzie podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \dots & \mathcal{B}_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{B}_{qq} \end{pmatrix},$$

która zawiera algebrę $\mathcal{A}$.

- a) Powiemy, że $\mathcal{A}$ zawiera się w $\mathcal{B}$ zgodnie z kształtem $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$, jeżeli $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$.
- b) Niech dodatkowo $\mathcal{A}$ będzie podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{q-t})$ dla pewnej liczby naturalnej $t \in \{1, 2, \dots, q-2\}$ w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1,q-t} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{q-t,q-t} \end{pmatrix}.$$

Wtedy powiemy, że $\mathcal{A}$ zawiera się w $\mathcal{B}$ zgodnie z kształtami $(n_1, n_2, \dots, n_{q-t})$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$, jeżeli algebra $\mathcal{A}$ zawiera się w $\mathcal{B}$ zgodnie z kształtem $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ oraz dla każdego indeksu $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ istnieje indeks $j \in \{1, 2, \dots, q-t\}$ taki, że

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0_{\ell_{i-1}} & 0_{\ell_{i-1} \times \ell_i} & 0_{\ell_{i-1} \times \ell_{i+1} \dots} \\ & & \mathcal{A}'_{ii} & 0_{\ell_i \times \ell_{i+1} \dots} \\ & & & 0_{\ell_{i+1}} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0_{n_{j-1}} & 0_{n_{j-1} \times n_j} & 0_{n_{j-1} \times n_{j+1} \dots} \\ & & \mathcal{A}_{jj} & 0_{n_j \times n_{j+1} \dots} \\ & & & 0_{n_{j+1}} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.2.2)$$

gdzie $\mathcal{A}$ jest również podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{11} & \dots & \mathcal{A}'_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}'_{qq} \end{pmatrix},$$

co wynika z zawierania algebry $\mathcal{A}$ w algebrze $\mathcal{B}$ zgodnego z kształtem $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$.

Uwaga 4.2.7. Dla ciągów liczb naturalnych $(n_1, n_2, \dots, n_{q-t})$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$, które spełniają równości $\sum_{i=1}^{q-t} n_i = \sum_{i=1}^q \ell_i = n$, określmy ciągi $(N_0, N_1, \dots, N_{q-t})$ oraz $(L_0, L_1, \dots, L_q)$ wzorami

$$N_u = \begin{cases} 0, & \text{gdy } u = 0, \\ n_1 + n_2 + \dots + n_u, & \text{gdy } u \in \{1, 2, \dots, q-t\}, \end{cases}$$

$$L_v = \begin{cases} 0, & \text{gdy } v = 0, \\ \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_v, & \text{gdy } v \in \{1, 2, \dots, q\}. \end{cases}$$

Niech $\mathcal{A}$ będzie podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{q-t})$. Załóżmy, że jednocześnie $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$. Wtedy warunek (4.2.2) z Definicji 4.2.6 jest równoważny z tym, że dla każdego indeksu $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ istnieje indeks $j \in \{1, 2, \dots, q-t\}$ taki, że $N_{j-1} \leq L_{i-1} < L_i \leq N_j$.

Podamy przykłady podalgebr blokowo trójkątnych, które spełniają Definicję 4.2.6 a), ale nie spełniają Definicji 4.2.6 b). W Stwierdzeniu 4.2.9 wskażemy podalgebry, dla których z Definicji 4.2.6 a) wynika Definicja 4.2.6 b).

Przykład 4.2.8. Niech $\mathcal{A}$ będzie D_3 podalgebrą $M_6(K)$ kształtu $(3, 1, 2)$ I typu z diagonalnymi blokami równymi

$$\mathcal{A}_{11} = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{22} = K, \quad \mathcal{A}_{33} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}.$$

Natomiast niech $\mathcal{B}$ będzie podalgebrą $M_6(K)$ kształtu $(2, 2, 1, 1)$ z diagonalnymi blokami równymi

$$\mathcal{B}_{11} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{22} = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{33} = \mathcal{B}_{44} = K,$$

i pozostałymi blokami równymi

$$\mathcal{B}_{12} = \begin{pmatrix} K & K \\ K & K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{13} = \mathcal{B}_{14} = \mathcal{B}_{23} = \mathcal{B}_{24} = \begin{pmatrix} K \\ K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{34} = \{0\}.$$

Zatem $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są następującymi podalgebrami $U_6(K)$

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} K & 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & K & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & K & K & K & K \\ \hline 0 & 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K \end{array} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} K & 0 & K & K & K & K \\ 0 & K & K & K & K & K \\ \hline 0 & 0 & K & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & K & K & K \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K \end{array} \right).$$

Ze względu na diagonalny blok $\mathcal{B}_{22}$, który jest algebrą nieprzemianną, oraz zerowy blok $\mathcal{B}_{34}$ algebra $\mathcal{B}$ nie jest D_4 podalgebrą $M_6(K)$ kształtu $(2, 2, 1, 1)$ I typu.

Algebra $\mathcal{A}$ zawiera się w algebrze $\mathcal{B}$. Co więcej, algebra $\mathcal{A}$ jest jednocześnie podalgebrą $M_6(K)$ kształtu $(2, 2, 1, 1)$ z diagonalnymi blokami

$$\mathcal{A}'_{11} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}'_{22} = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}'_{33} = \mathcal{A}'_{44} = K$$

oraz pozostałymi blokami równymi

$$\mathcal{A}'_{12} = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}'_{13} = \mathcal{A}'_{14} = \mathcal{A}'_{23} = \mathcal{A}'_{24} = \begin{pmatrix} K \\ K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}'_{34} = \{0\}.$$

Stąd wynika, że $\mathcal{A}$ zawiera się w $\mathcal{B}$ zgodnie z kształtem $(2, 2, 1, 1)$. Jednak algebra $\mathcal{A}$ nie zawiera się w $\mathcal{B}$ zgodnie z kształtami $(3, 1, 2)$ oraz $(2, 2, 1, 1)$, ponieważ

$$\begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} \\ & \mathcal{A}'_{22} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \not\subseteq \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 2} \\ & 0 & 0_{1 \times 2} \\ & & 0_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} \\ & \mathcal{A}'_{22} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \not\subseteq \begin{pmatrix} 0_3 & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 2} \\ & \mathcal{A}_{22} & 0_{1 \times 2} \\ & & 0_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} \\ & \mathcal{A}'_{22} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \not\subseteq \begin{pmatrix} 0_3 & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 2} \\ & 0 & 0_{1 \times 2} \\ & & \mathcal{A}_{33} \end{pmatrix}.$$

Stwierdzenie 4.2.9. Niech $\mathcal{A}$ będzie D_{q-1} podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{q-1})$ I typu, natomiast $\mathcal{B}$ niech będzie D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ I typu, która zawiera algebrę $\mathcal{A}$. Jeśli $\mathcal{A}$ zawiera się w $\mathcal{B}$ zgodnie z kształtem $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$, to

a) $\mathcal{A}$ zawiera się w $\mathcal{B}$ zgodnie z kształtami $(n_1, n_2, \dots, n_{q-1})$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$,

b) istnieje liczba naturalna $i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ taka, że

$$\ell_1 = n_1, \ell_2 = n_2, \dots, \ell_{i-1} = n_{i-1}, \ell_i + \ell_{i+1} = n_i, \ell_{i+2} = n_{i+1}, \dots, \ell_q = n_{q-1}.$$

Dowód. Zapiszmy podalgebry $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ w postaciach blokowo trójkątnych odpowiadających temu, że $\mathcal{A}$ jest D_{q-1} podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{q-1})$ I typu i $\mathcal{B}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ I typu

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1,q-1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{q-1,q-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \dots & \mathcal{B}_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{B}_{qq} \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $\mathcal{A}$ zawiera się w $\mathcal{B}$ zgodnie z kształtem $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$, to $\mathcal{A}$ jest także podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{11} & \dots & \mathcal{A}'_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}'_{qq} \end{pmatrix}.$$

Z zawierania algebry $\mathcal{A}$ w algebrze $\mathcal{B}$ wynika, że dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ algebra $\mathcal{A}'_{ii}$ jest podalgebrą $\mathcal{B}_{ii}$.

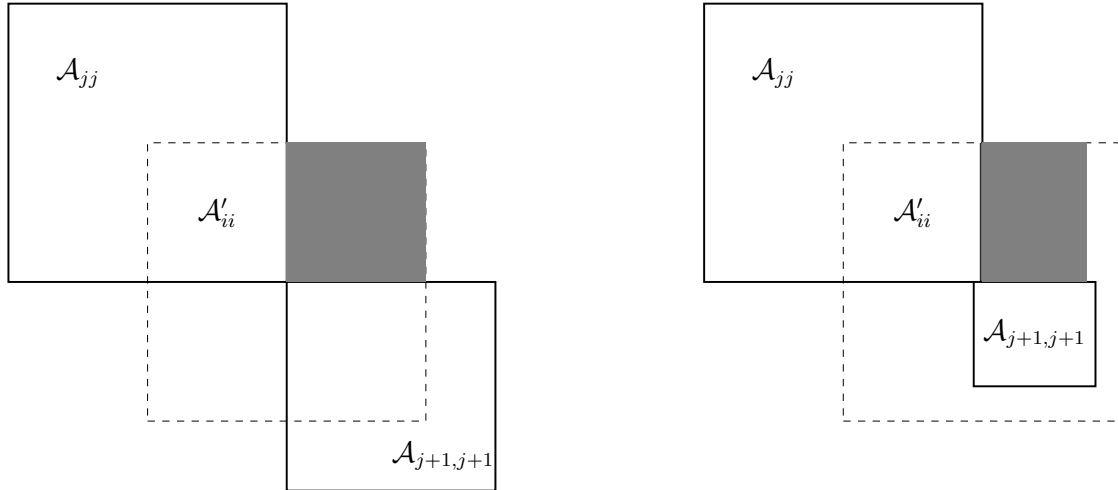
W dowodzie wykorzystamy ciągi $(N_0, N_1, \dots, N_{q-1})$ oraz $(L_0, L_1, \dots, L_q)$ określone zgodnie z Uwagą 4.2.7. Oprzemy się na tym, że dla wszystkich $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ spełniona jest implikacja:

$$N_{j-1} \leq L_{i-1} < N_j \quad \Rightarrow \quad L_i \leq N_j. \quad (4.2.3)$$

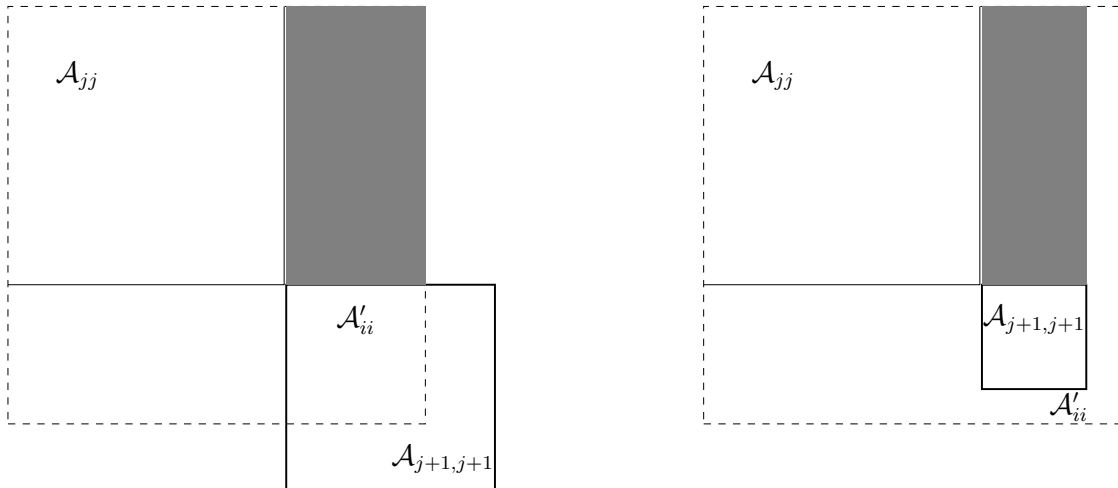
Podobnie jak Uwaga 4.2.7, powyższa implikacja odpowiada pewnym zależnościom między przedstawieniami algebry $\mathcal{A}$ w postaciach blokowych.

Przypuśćmy nie wprost, że implikacja (4.2.3) nie zachodzi. Wówczas istnieją indeksy i oraz j , dla których spełniona jest nierówność $N_{j-1} \leq L_{i-1} < N_j < L_i$. Zilustrujemy zależności między blokami $\mathcal{A}_{jj}$, $\mathcal{A}'_{ii}$ oraz $\mathcal{A}_{j+1,j+1}$ wynikające z tej nierówności. Blok $\mathcal{A}'_{ii}$ będziemy zaznaczać linią przerywaną.

Sytuacji, w której $N_{j-1} < L_{i-1}$ oraz $L_i < N_{j+1}$ odpowiada poniższy rysunek z lewej strony, a rysunek z prawej strony odpowiada sytuacji, gdy $N_{j-1} < L_{i-1}$ oraz $L_i > N_{j+1}$.



Analogiczne przypadki, gdy $N_{j-1} = L_{i-1}$, ilustrują następujące rysunki.



Na dwóch powyższych rysunkach znajdujących się z lewej strony szary blok symbolizuje zbiór wszystkich macierzy $(N_j - L_{i-1}) \times (L_i - N_j)$, natomiast na dwóch powyższych rysunkach z prawej strony symbolizuje on zbiór wszystkich macierzy $(N_j - L_{i-1}) \times n_{j+1}$. Na każdym ze wspomnianych rysunków wyróżniony blok zawiera się w bloku $\mathcal{A}_{j,j+1} = M_{n_j \times n_{j+1}}(K)$ oraz w bloku $\mathcal{A}'_{ii}$. Niezależnie od tego, jakie są relacje między przedstawionymi wyżej blokami, możemy określić podzbiór $\mathcal{W}$ algebry $M_n(K)$ w następujący sposób: elementami $\mathcal{W}$ są wszystkie macierze należące do $M_n(K)$, które na miejscu szarego bloku mają dowolne wyrazy z ciała K , a w pozostałych miejscach mają zera. Do algebry $\mathcal{A}$, również niezależnie od relacji między blokami pokazanymi na powyższych rysunkach, należy macierz E , która ma jedynki w miejscu głównej przekątnej bloku zaznaczonego dwiema krawędziami przerywanymi i dwiema ciągłymi, będącego po lewej stronie szarego bloku, a w pozostałych miejscach ma zera. Istotnie, macierz E jest różnicą macierzy

$$\sum_{k=1}^{N_j} e_{kk} \quad \text{ i } \quad \sum_{k=1}^{L_{i-1}} e_{kk},$$

które należą do $\mathcal{A}$. Dla dowolnej niezerowej macierzy $W \in \mathcal{W}$ iloczyn $E \cdot W = W$ jest niezerowy, natomiast iloczyn $W \cdot E$ jest macierzą zerową. Uzyskaliśmy sprzeczność z tym, że $\mathcal{A}'_{ii}$ jest podalgebrą algebry przemiennej $\mathcal{B}_{ii}$. To pokazuje, że implikacja (4.2.3) jest prawdziwa.

Udowodnimy teraz podpunkt a) stwierdzenia. W tym celu sprawdzimy, że spełniony jest warunek podany w Uwadze 4.2.7. Rozważmy dowolną liczbę $i \in \{1, 2, \dots, q\}$. Ponieważ ciągi $(n_1, n_2, \dots, n_{q-1})$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ wyznaczają kształty podalgebr $M_n(K)$, to

$$L_0 < L_1 < \dots < L_q = \sum_{k=1}^q \ell_k = n = \sum_{k=1}^{q-1} n_k = N_{q-1}.$$

Istnieje więc liczba $j \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ taka, że $N_{j-1} \leq L_{i-1} < N_j$. Zatem z implikacji (4.2.3) wynika, że $L_i \leq N_j$. Pokazaliśmy więc, że liczby i, j spełniają warunek z Uwagi 4.2.7.

Aby zakończyć dowód, pozostało nam pokazać podpunkt b) stwierdzenia. W tym celu także zastosujemy implikację (4.2.3). Ponieważ $N_0 = L_0$ oraz $L_{q-1} \neq n = N_{q-1}$, to istnieje najmniejszy indeks $s \in \{1, 2, \dots, q-1\}$, dla którego

$$L_0 = N_0, \quad L_1 = N_1, \quad \dots, \quad L_{s-1} = N_{s-1} \quad \text{ i } \quad L_s \neq N_s.$$

Spełniona jest więc nierówność $N_{s-1} \leq L_{s-1} < N_s$, zatem z implikacji (4.2.3) wynika, że $L_s < N_s$. Następnie, implikacja (4.2.3) użyta do nierówności $N_{s-1} \leq L_s < N_s$, daje nierówność $L_{s+1} \leq N_s$. Wykorzystując ostatni argument, pokazujemy, że istnieje liczba naturalna $k \geq 1$, dla której

$$L_s < L_{s+1} < \dots < L_{s+k} = N_s.$$

Sprawdzimy, że $k = 1$. Podobnie jak wcześniej, z implikacji (4.2.3) otrzymujemy, że

$$L_{s+k+1} \leq N_{s+1}, \quad L_{s+k+2} \leq N_{s+2}, \quad \dots, \quad L_q \leq N_{q-k}.$$

Z ostatniej nierówności wynika, że $k = 1$, ponieważ w przeciwnym przypadku $n = L_q \leq N_{q-k} < N_{q-1} = n$.

Udowodniliśmy, że

$$L_0 = N_0, \quad L_1 = N_1, \quad \dots, \quad L_{s-1} = N_{s-1}, \quad L_{s+1} = N_s. \quad (4.2.4)$$

Podobnie pokazujemy, że

$$L_{s+2} = N_{s+1}, \quad L_{s+3} = N_{s+2}, \quad \dots, \quad L_q = N_{q-1}. \quad (4.2.5)$$

Z równości (4.2.4) oraz (4.2.5) wynika, że

$$\ell_1 = n_1, \ell_2 = n_2, \dots, \ell_{s-1} = n_{s-1}, \ell_s + \ell_{s+1} = n_s, \ell_{s+2} = n_{s+1}, \dots, \ell_q = n_{q-1},$$

co kończy dowód. $\square$

Uzupełniającym wynikiem do powyższego Stwierdzenia 4.2.9 jest następujący lemat.

Lemat 4.2.10. *Niech $\mathcal{A}$ będzie D_{q-1} podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{q-1})$ I typu, która ma następującą postać blokowo trójkątną*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1,q-1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{q-1,q-1} \end{pmatrix}.$$

Niech $\mathcal{B}$ będzie D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ I typu. Podalgebra $\mathcal{A}$ zawiera się w podalgebrze $\mathcal{B}$ zgodnie z kształtem $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$, dla której spełnione są następujące warunki:

- a) $\ell_1 = n_1, \ell_2 = n_2, \dots, \ell_{i-1} = n_{i-1}, \ell_i + \ell_{i+1} = n_i, \ell_{i+2} = n_{i+1}, \dots, \ell_q = n_{q-1},$
- b) *istnieją przemienne podalgebry $\mathcal{C}_1$ oraz $\mathcal{C}_2$, odpowiednio algebr macierzy $M_{\ell_i}(K)$ oraz $M_{\ell_{i+1}}(K)$ takie, że blok $\mathcal{A}_{ii}$ jest równy*
$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 & 0_{\ell_i \times \ell_{i+1}} \\ 0_{\ell_{i+1} \times \ell_i} & \mathcal{C}_2 \end{pmatrix},$$
- c) *podalgebra $\mathcal{B}$ powstała z podalgebry $\mathcal{A}$ przez zastąpienie bloku $\mathcal{A}_{ii}$ blokiem*

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 & M_{\ell_i \times \ell_{i+1}}(K) \\ 0_{\ell_{i+1} \times \ell_i} & \mathcal{C}_2 \end{pmatrix}$$

oraz zachowanie pozostałych bloków $\mathcal{A}$.

Dowód. Jeśli podalgebry $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ spełniają warunki a), b), c) lematu, to $\mathcal{A}$ zawiera się w $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{A}$ jest jednocześnie podalgebrą $M_n(K)$ kształtów $(n_1, n_2, \dots, n_{q-1})$ i $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$. Zatem $\mathcal{A}$ zawiera się w $\mathcal{B}$ zgodnie z kształtem $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$.

Pokażemy teraz przeciwną implikację. Załóżmy, że podalgebra $\mathcal{A}$ zawiera się w podalgebrze $\mathcal{B}$ zgodnie z kształtem $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$. Ze Stwierdzenia 4.2.9 istnieje indeks i , dla którego spełnione są równości

$$\ell_1 = n_1, \quad \ell_2 = n_2, \quad \dots \quad \ell_{i-1} = n_{i-1}, \quad \ell_i + \ell_{i+1} = n_i, \quad \ell_{i+2} = n_{i+1}, \quad \dots \quad \ell_q = n_{q-1},$$

więc dla liczby i podpunkt a) lematu jest spełniony.

Aby zakończyć dowód, sprawdzimy, że dla liczby i spełnione są także podpunkty b) oraz c). Zapiszmy podalgebrę $\mathcal{B}$ w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \cdots & \mathcal{B}_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{B}_{qq} \end{pmatrix}, \quad (4.2.6)$$

która odpowiada temu, że $\mathcal{B}$ jest D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ I typu. Ponieważ $\mathcal{A}$ zawiera się w $\mathcal{B}$ zgodnie z kształtem $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$, to $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{11} & \cdots & \mathcal{A}'_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}'_{qq} \end{pmatrix}. \quad (4.2.7)$$

Porównamy powyższe przedstawienie algebry $\mathcal{A}$ z przedstawieniem w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \cdots & \mathcal{A}_{1,q-1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{q-1,q-1} \end{pmatrix},$$

które wynika z tego, że $\mathcal{A}$ jest D_{q-1} podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{q-1})$. Ze względu na udowodniony podpunkt a), dostajemy następujące zależności:

$$\mathcal{A}_{jk} = \mathcal{A}'_{jk} \quad \text{dla dowolnych } j, k \in \{1, 2, \dots, i-1\}, \quad (4.2.8)$$

$$\mathcal{A}_{ji} = (\mathcal{A}'_{ji} \quad \mathcal{A}'_{j,i+1}) \quad \text{dla dowolnego } j \in \{1, 2, \dots, i-1\}, \quad (4.2.9)$$

$$\mathcal{A}_{ik} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{i,k+1} \\ \mathcal{A}'_{i+1,k+1} \end{pmatrix} \quad \text{dla dowolnego } k \in \{i+1, i+2, \dots, q-1\}, \quad (4.2.10)$$

$$\mathcal{A}_{jk} = \mathcal{A}'_{j,k+1} \quad \text{dla dowolnych } j \in \{1, 2, \dots, i-1\}, \quad (4.2.11)$$

$$k \in \{i+1, i+2, \dots, q-1\},$$

$$\mathcal{A}_{jk} = \mathcal{A}'_{j+1,k+1} \quad \text{dla dowolnych } j, k \in \{i+1, i+2, \dots, q-1\}, \quad (4.2.12)$$

$$\mathcal{A}_{ii} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{ii} & \mathcal{A}'_{i,i+1} \\ 0_{\ell_{i+1} \times \ell_i} & \mathcal{A}'_{i+1,i+1} \end{pmatrix}. \quad (4.2.13)$$

Pokażemy, że blok $\mathcal{A}'_{i,i+1}$ jest zerowy. Wtedy z równości (4.2.13) wywnioskujemy, że blok $\mathcal{A}_{ii}$ spełnia podpunkt b) lematu. Przypuśćmy przeciwnie, że blok $\mathcal{A}'_{i,i+1}$ jest niezerowy. Wówczas do algebry $\mathcal{A}_{ii}$ należy macierz $\begin{pmatrix} 0_{\ell_i} & X \\ 0_{\ell_{i+1} \times \ell_i} & 0_{\ell_{i+1}} \end{pmatrix}$, gdzie X jest pewną niezerową macierzą należącą do $\mathcal{A}'_{i,i+1}$. Ponieważ I_{ℓ_i} należy do $\mathcal{A}'_{ii}$, to z równości (4.2.13) wynika, że do $\mathcal{A}_{ii}$ należy również macierz $\begin{pmatrix} I_{\ell_i} & 0_{\ell_i \times \ell_{i+1}} \\ 0_{\ell_{i+1} \times \ell_i} & 0_{\ell_{i+1}} \end{pmatrix}$. Zatem z równości

$$\begin{pmatrix} I_{\ell_i} & 0_{\ell_i \times \ell_{i+1}} \\ 0_{\ell_{i+1} \times \ell_i} & 0_{\ell_{i+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{\ell_i} & X \\ 0_{\ell_{i+1} \times \ell_i} & 0_{\ell_{i+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{\ell_i} & X \\ 0_{\ell_{i+1} \times \ell_i} & 0_{\ell_{i+1}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0_{\ell_i} & X \\ 0_{\ell_{i+1} \times \ell_i} & 0_{\ell_{i+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\ell_i} & 0_{\ell_i \times \ell_{i+1}} \\ 0_{\ell_{i+1} \times \ell_i} & 0_{\ell_{i+1}} \end{pmatrix} = 0_{\ell_i + \ell_{i+1}}$$

otrzymujemy sprzeczność z przemiennością algebry $\mathcal{A}_{ii}$. Udowodniliśmy, że blok $\mathcal{A}'_{i,i+1}$ jest zerowy. Ponieważ $\mathcal{A}_{ii}$ jest maksymalną przemienną podalgebrą $M_{n_i}(K)$, więc z równości (4.2.13) wynika, że $\mathcal{A}'_{ii}$ oraz $\mathcal{A}'_{i+1,i+1}$ są maksymalnymi przemiennymi podalgebrami odpowiednio algebr $M_{\ell_i}(K)$ oraz $M_{\ell_{i+1}}(K)$. Udowodniliśmy, że dla liczby i spełniony jest podpunkt b) lematu.

Pozostało pokazać, że dla liczby i spełniony jest podpunkt c). Aby to zrobić, sprawdzimy, że

$$\mathcal{A}'_{jk} = \mathcal{B}_{jk} \text{ dla } (j, k) \in \{(r, s) : 1 \leq r \leq s \leq q\} \setminus \{(i, i+1)\}. \quad (4.2.14)$$

Najpierw udowodnimy, że

$$\mathcal{A}'_{11} = \mathcal{B}_{11}, \quad \mathcal{A}'_{22} = \mathcal{B}_{22}, \quad \dots, \quad \mathcal{A}'_{qq} = \mathcal{B}_{qq}.$$

Z równości (4.2.8) wynika, że

$$\mathcal{A}'_{11} = \mathcal{A}_{11}, \quad \mathcal{A}'_{22} = \mathcal{A}_{22}, \quad \dots, \quad \mathcal{A}'_{i-1,i-1} = \mathcal{A}_{i-1,i-1},$$

więc $\mathcal{A}'_{11}, \mathcal{A}'_{22}, \dots, \mathcal{A}'_{i-1,i-1}$ są maksymalnymi przemiennymi podalgebrami odpowiednio algebr $M_{\ell_1}(K), M_{\ell_2}(K), \dots, M_{\ell_{i-1}}(K)$. Ponieważ algebra $\mathcal{A}$ zawiera się w algebrze $\mathcal{B}$ zgodnie z kształtem $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$, to dla dowolnego $j \in \{1, 2, \dots, i-1\}$ algebra $\mathcal{A}'_{jj}$ jest podalgebrą $\mathcal{B}_{jj}$. Algebry $\mathcal{B}_{11}, \mathcal{B}_{22}, \dots, \mathcal{B}_{i-1,i-1}$ są przemienne, zatem z maksymalności algebr $\mathcal{A}'_{11}, \mathcal{A}'_{22}, \dots, \mathcal{A}'_{i-1,i-1}$ dostajemy równości

$$\mathcal{A}'_{11} = \mathcal{B}_{11}, \quad \mathcal{A}'_{22} = \mathcal{B}_{22}, \quad \dots, \quad \mathcal{A}'_{i-1,i-1} = \mathcal{B}_{i-1,i-1}.$$

Podobnie, korzystając z równości (4.2.12), (4.2.13), $\mathcal{A}'_{i,i+1} = 0_{\ell_i \times \ell_{i+1}}$ pokazujemy, że

$$\mathcal{A}'_{ii} = \mathcal{B}_{ii}, \quad \mathcal{A}'_{i+1,i+1} = \mathcal{B}_{i+1,i+1}, \quad \dots, \quad \mathcal{A}'_{qq} = \mathcal{B}_{qq}.$$

Dowolny blok $\mathcal{A}_{jk}$, gdzie $(j, k) \in \{(r, s) : 1 \leq r \leq s \leq q-1\} \setminus \{(1, 1), \dots, (q-1, q-1)\}$, jest zbiorem wszystkich macierzy $n_j \times n_k$ o wyrazach w K . Stąd oraz z równości (4.2.8)–(4.2.12) wynika, że bloki $\mathcal{A}'_{jk}$ są zbiorami pełnych macierzy $\ell_j \times \ell_k$ dla

$$(j, k) \in \{(r, s) : 1 \leq r \leq s \leq q\} \setminus \{(1, 1), (2, 2), \dots, (q, q), (i, i+1)\}.$$

Zatem są one równe blokom $\mathcal{B}_{jk}$. Pokazaliśmy, że formuła (4.2.14) jest prawdziwa także dla par (j, k) , gdzie $j \neq k$. Zakończyliśmy dowód tego, że liczba i spełnia podpunkt c). $\square$

Niech n i n_1 będą liczbami naturalnymi spełniającymi nierówność $n_1 < n$. Załóżmy, że dla pewnych przemiennych podalgebr $\mathcal{C}_1$ oraz $\mathcal{C}_2$ odpowiednio algebr $M_{n_1}(K)$ oraz $M_{n-n_1}(K)$ algebra $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ w postaci blokowej $\begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 & 0_{n_1 \times (n-n_1)} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & \mathcal{C}_2 \end{pmatrix}$.

W takiej postaci jest blok $\mathcal{A}_{ii}$ z podpunktu b) Lematu 4.2.10. Wtedy $\mathcal{A}$ jest przemienną podalgebrą $M_n(K)$, do której należy idempotent $\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times (n-n_1)} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & 0_{n-n_1} \end{pmatrix}$.

Założmy teraz odwrotnie, że $\mathcal{A}$ jest przemienną podalgebrą $M_n(K)$, do której należy idempotent $E = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times (n-n_1)} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & 0_{n-n_1} \end{pmatrix}$. Wtedy na mocy Twierdzenia 1.0.9 algebra $\mathcal{A}$ rozkłada się na sumę prostą podprzestrzeni liniowych $E\mathcal{A}E \oplus (I_n - E)\mathcal{A}(I_n - E)$, gdzie

$$\begin{aligned} E\mathcal{A}E &= \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times (n-n_1)} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & 0_{n-n_1} \end{pmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times (n-n_1)} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & 0_{n-n_1} \end{pmatrix} \\ &\subseteq \begin{pmatrix} M_{n_1}(K) & 0_{n_1 \times (n-n_1)} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & 0_{n-n_1} \end{pmatrix}, \\ (I_n - E)\mathcal{A}(I_n - E) &= \begin{pmatrix} 0_{n_1} & 0_{n_1 \times (n-n_1)} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & I_{n-n_1} \end{pmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} 0_{n_1} & 0_{n_1 \times (n-n_1)} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & I_{n-n_1} \end{pmatrix} \\ &\subseteq \begin{pmatrix} 0_{n_1} & 0_{n_1 \times (n-n_1)} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & M_{n-n_1}(K) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że algebra $\mathcal{A}$ jest w postaci blokowej $\begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 & 0_{n_1 \times (n-n_1)} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & \mathcal{C}_2 \end{pmatrix}$, gdzie $\mathcal{C}_1$ oraz $\mathcal{C}_2$ są odpowiednio przemiennymi podalgebrami $M_{n_1}(K)$ oraz $M_{n-n_1}(K)$ powstałymi z niezerowych bloków macierzy należących do $E\mathcal{A}E$ oraz $(I_n - E)\mathcal{A}(I_n - E)$.

W podobny sposób otrzymujemy następującą charakteryzację przemiennych podalgebr $M_n(K)$, które mają postać blokowo diagonalną.

Lemat 4.2.11. *Nich q będzie liczbą naturalną większą lub równą 2 oraz niech $n, n_1, n_2, \dots, n_q$ będą liczbami naturalnymi takimi, że $\sum_{i=1}^q n_i = n$. Założmy, że $\mathcal{A}$ jest przemienną podalgebrą $M_n(K)$. Wówczas $\mathcal{A}$ ma postać blokowo diagonalną*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 & 0_{n_1 \times n_2} & \dots & 0_{n_1 \times n_q} \\ 0_{n_2 \times n_1} & \mathcal{C}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{n_{q-1} \times n_q} \\ 0_{n_q \times n_1} & \dots & 0_{n_q \times n_{q-1}} & \mathcal{C}_q \end{pmatrix}$$

dla pewnych przemiennych podalgebr $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_q$ odpowiednio algebr macierzy $M_{n_1}(K), M_{n_2}(K), \dots, M_{n_q}(K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy idempotenty

$$\sum_{i=1}^{n_1} e_{ii}, \quad \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} e_{ii}, \quad \dots, \quad \sum_{i=n_1+\dots+n_{q-2}+1}^{n_1+\dots+n_{q-1}} e_{ii} \quad (4.2.15)$$

należą do algebry $\mathcal{A}$.

Uwaga 4.2.12. Jeśli idempotenty określone we wzorze (4.2.15) należą do podalgebry $M_n(K)$, to należą do niej również idempotenty

$$E_{N_1} = \sum_{i=1}^{N_1} e_{ii}, \quad E_{N_2} = \sum_{i=1}^{N_2} e_{ii}, \quad \dots, \quad E_{N_{q-1}} = \sum_{i=1}^{N_{q-1}} e_{ii}, \quad (4.2.16)$$

gdzie $N_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i$ dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$.

Odwrotnie, jeśli do podalgebry $M_n(K)$ należą idempotenty ze wzoru (4.2.16), to należą do niej idempotenty ze wzoru (4.2.15).

Twierdzenie 4.2.13. *Niech q oraz t będą liczbami naturalnymi takimi, że $1 \leq t < q$. Niech $\mathcal{A}$ będzie D_{q-t} podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{q-t})$ I typu w postaci blokowo trójkątnej*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1,q-t} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{q-t,q-t} \end{pmatrix}. \quad (4.2.17)$$

Wówczas następujące warunki są równoważne:

1) Istnieje D_q podalgebra $\mathcal{B}$ algebry $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ I typu, w której $\mathcal{A}$ zawiera się zgodnie z kształtem $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$.

2) Istnieje liczba naturalna b oraz liczby $i_1, i_2, \dots, i_b \in \{1, 2, \dots, q-t\}$ takie, że:

(i) dla każdego $p \in \{1, 2, \dots, b\}$ algebra $\mathcal{A}_{i_p i_p}$ jest w postaci blokowo diagonalnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}_1^{(p)} & & & \\ & \mathcal{C}_2^{(p)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{C}_{s_{i_p}+1}^{(p)} \end{pmatrix}$$

dla pewnych maksymalnych przemiennych podalgebr $\mathcal{C}_1^{(p)}, \mathcal{C}_2^{(p)}, \dots, \mathcal{C}_{s_{i_p}+1}^{(p)}$ algebr macierzy odpowiednich rozmiarów o wyrazach w ciele K oraz dla pewnej liczby naturalnej s_{i_p} ,

(ii) $\sum_{p=1}^b s_{i_p} \geq t$.

3) Istnieją algebry $\mathcal{B}_1 \subsetneq \mathcal{B}_2 \subseteq \dots \subsetneq \mathcal{B}_t$ takie, że dla dowolnego $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ algebra $\mathcal{B}_k$ jest D_{q-t+k} podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1^{(k)}, \ell_2^{(k)}, \dots, \ell_{q-t+k}^{(k)})$ I typu oraz algebra $\mathcal{B}_{k-1}$ zawiera się w algebrze $\mathcal{B}_k$ zgodnie z kształtem $(\ell_1^{(k)}, \ell_2^{(k)}, \dots, \ell_{q-t+k}^{(k)})$, gdzie przez $\mathcal{B}_0$ oznaczamy algebrę $\mathcal{A}$.

Dowód. Zaczniemy od pokazania, że z podpunktu 1) twierdzenia wynika podpunkt 2). Rozpatrzmy ciągi $(N_1, N_2, \dots, N_{q-t})$ oraz $(L_1, L_2, \dots, L_q)$ określone zgodnie z Uwagą 4.2.7. Ponieważ liczby $N_1, N_2, \dots, N_{q-t}$ są różne i analogicznie liczby $L_1, L_2, \dots, L_q$ są różne, to zbiór

$$\Lambda = \{L_u : L_u \notin \{N_1, N_2, \dots, N_{q-t}\}\}$$

ma co najmniej t elementów. Rozbijemy zbiór Λ na sumę rozłącznych niepustych podzbiorów związanych z liczbami $N_1, N_2, \dots, N_{q-t}$. Dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q-t\}$ określmy

$$\Lambda_i = \{L_u \in \Lambda : \min\{k \in \{1, 2, \dots, q-t\} : L_u < N_k\} = i\}. \quad (4.2.18)$$

Niech $i_1, i_2, \dots, i_b$, dla pewnej liczby naturalnej b , będą wszystkimi indeksami, dla których zbiór zdefiniowany w (4.2.18) jest niepusty. Wtedy podzbiory $\Lambda_{i_1}, \Lambda_{i_2}, \dots, \Lambda_{i_b}$ są rozłączne oraz z równości $N_{q-t} = n_1 + n_2 + \dots + n_{q-t} = n$ wynika, że $\bigcup_{p=1}^b \Lambda_{i_p} = \Lambda$. Dla dowolnego $p \in \{1, 2, \dots, b\}$ niech s_{i_p} będzie liczbą elementów zbioru Λ_{i_p} , natomiast

$$L_{m_p}, L_{m_p+1}, \dots, L_{m_p+s_{i_p}-1},$$

dla pewnej liczby naturalnej m_p , niech będą jego elementami. Zatem

$$\sum_{p=1}^b s_{i_p} = \sum_{p=1}^b |\Lambda_{i_p}| = \left| \bigcup_{p=1}^b \Lambda_{i_p} \right| = |\Lambda| \geq t. \quad (4.2.19)$$

Algebra $\mathcal{A}$ zawiera się w algebrze $\mathcal{B}$ zgodnie z kształtem $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$, co implikuje, że $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{11} & \cdots & \mathcal{A}'_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}'_{qq} \end{pmatrix}.$$

Niech p będzie dowolną liczbą ze zbioru $\{1, 2, \dots, b\}$. Ponieważ $I_{\ell_1} \in \mathcal{A}'_{11}$, $I_{\ell_2} \in \mathcal{A}'_{22}$, $\dots$, $I_{\ell_q} \in \mathcal{A}'_{qq}$, to do algebry $\mathcal{A}$ należą idempotenty

$$E_{L_{m_p}}, \quad E_{L_{m_p}+1}, \quad \dots \quad E_{L_{m_p}+s_{i_p}-1},$$

które są określone analogicznie jak idempotenty ze wzoru (4.2.16). Wykorzystamy je do pokazania, że algebra $\mathcal{A}_{i_p, i_p}$ spełnia 2) podpunkt (i) twierdzenia.

Jeśli $i_p = 1$, to z określenia liczb $L_{m_1}, L_{m_1+1}, \dots, L_{m_1+s_1-1}$ wynikają nierówności $L_{m_1}, L_{m_1+1}, \dots, L_{m_1+s_1-1} < N_1$. Stąd otrzymujemy, że

$$E_{L_{m_1}}, \quad E_{L_{m_1}+1}, \quad \dots \quad E_{L_{m_1}+s_1-1} \in \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & 0_{n_1 \times n_2} & \cdots & 0_{n_1 \times n_{q-t}} \\ & 0_{n_2} & \cdots & 0_{n_2 \times n_{q-t}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0_{n_{q-t}} \end{pmatrix}.$$

Zatem na mocy Lematu 4.2.11 i Uwagi 4.2.12 algebra $\mathcal{A}_{11}$ jest w postaci blokowo diagonalnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}_1^{(1)} & & & \\ & \mathcal{C}_2^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{C}_{s_1+1}^{(1)} \end{pmatrix}$$

dla pewnych przemiennej podalgebr $\mathcal{C}_1^{(1)}, \mathcal{C}_2^{(1)}, \dots, \mathcal{C}_{s_1+1}^{(1)}$ algebr macierzy odpowiednich rozmiarów. Z tego, że $\mathcal{A}_{11}$ jest maksymalną przemianą podalgebrą $M_{n_1}(K)$ wynika, że $\mathcal{C}_1^{(1)}, \mathcal{C}_2^{(1)}, \dots, \mathcal{C}_{s_1+1}^{(1)}$ są maksymalnymi przemieniami podalgebrami algebr macierzy.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy $i_p > 1$. Algebra $\mathcal{A}$ jest w postaci blokowej (4.2.17), więc należy do niej idempotent $E_{N_{i_p-1}}$. Podobnie jak w poprzednim przypadku, z określenia wynikają nierówności $N_{i_p-1} < L_{m_p}, L_{m_p+1}, \dots, L_{m_p+s_{i_p}-1} < N_{i_p}$. Stąd otrzymujemy, że idempotenty

$$E_{L_{m_p}} - E_{N_{i_p-1}}, E_{L_{m_p+1}} - E_{N_{i_p-1}}, \dots, E_{L_{m_p+s_{i_p}-1}} - E_{N_{i_p-1}}$$

należą do algebry

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & 0_{n_{i_p-1}} & 0_{n_{i_p-1} \times n_{i_p}} & 0_{n_{i_p-1} \times n_{i_p+1}} & \cdots \\ & & \mathcal{A}_{i_p, i_p} & 0_{n_{i_p} \times n_{i_p+1}} & \cdots \\ & & & 0_{n_{i_p+1}} & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Zatem, powtarzając rozumowanie z poprzedniego przypadku, z Lematu 4.2.11 i Uwagi 4.2.12 dostajemy, że algebra $\mathcal{A}_{i_p, i_p}$ jest w postaci blokowej, która spełnia 2) podpunkt (i) twierdzenia. To wraz z równością (4.2.19) kończy dowód tej implikacji.

Udowodnimy kolejną implikację. Załóżmy, że $\mathcal{A}$ jest D_{q-t} podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{q-t})$ I typu, która w postaci blokowo trójkątnej (4.2.17) spełnia warunki podane w podpunkcie 2) twierdzenia. Pokażemy, że istnieją podalgebry $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_t$ algebry $M_n(K)$ spełniające podpunkt 3).

Niech $r_1, r_2, \dots, r_{s_{i_1}+1}$ będą rozmiarami algebr macierzy, których podalgebrami są odpowiednio algebry $\mathcal{C}_1^{(1)}, \mathcal{C}_2^{(1)}, \dots, \mathcal{C}_{s_{i_1}+1}^{(1)}$ z bloku $\mathcal{A}_{i_1, i_1}$. Sprawdzimy, że za algebrę $\mathcal{B}_1$ możemy przyjąć podalgebrę $M_n(K)$ otrzymaną z algebry $\mathcal{A}$ przez zamianę bloku $\mathcal{A}_{i_1, i_1}$ blokiem

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}_1^{(1)} & M_{r_1 \times r_2}(K) & M_{r_1 \times r_3}(K) & \cdots & M_{r_1 \times r_{s_{i_1}+1}}(K) \\ & \mathcal{C}_2^{(1)} & 0_{r_2 \times r_3} & \cdots & 0_{r_2 \times r_{s_{i_1}+1}} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0_{r_{s_{i_1}} \times r_{s_{i_1}+1}} \\ & & & & \mathcal{C}_{s_{i_1}+1}^{(1)} \end{pmatrix}$$

i zachowanie pozostałych bloków $\mathcal{A}$. Istotnie, algebra $\mathcal{A}_{i_1, i_1}$ jest w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{i_1, i_1}^{(1)} & 0_{r_1 \times (n_{i_1} - r_1)} \\ 0_{(n_{i_1} - s_1) \times s_1} & \mathcal{A}_{i_1, i_1}^{(2)} \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\mathcal{A}_{i_1, i_1}^{(1)} = \mathcal{C}_1^{(1)}, \quad \mathcal{A}_{i_1, i_1}^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_2^{(1)} & 0_{r_2 \times r_3} & \cdots & 0_{r_2 \times r_{s_{i_1}+1}} \\ & \mathcal{C}_2^{(1)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0_{r_{s_{i_1}} \times r_{s_{i_1}+1}} \\ & & & \mathcal{C}_{s_{i_1}+1}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $\mathcal{A}_{i_1, i_1}$ jest maksymalną przemienną podalgebrą $M_{n_{i_1}}(K)$, to $\mathcal{A}_{i_1, i_1}^{(1)}$ oraz $\mathcal{A}_{i_1, i_1}^{(2)}$ są maksymalnymi przemiennymi podalgebrami odpowiednio $M_{r_1}(K)$ oraz $M_{n_{i_1}-r_1}(K)$. Stąd wynika, że opisana na początku akapitu algebra jest D_{q-t+1} podalgebrą $M_n(K)$ kształtu

$$(n_1, n_2, \dots, n_{i_1-1}, r_1, n_{i_1} - r_1, n_{i_1+1}, \dots, n_{q-t})$$

I typu, której diagonalne bloki są równe

$$\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22}, \dots, \mathcal{A}_{i_1-1, i_1-1}, \mathcal{A}_{i_1, i_1}^{(1)}, \mathcal{A}_{i_1, i_1}^{(2)}, \mathcal{A}_{i_1+1, i_1+1}, \dots, \mathcal{A}_{q-t, q-t}.$$

Zatem na mocy Lematu 4.2.10 algebra $\mathcal{A}$ zanurza się w nią zgodnie z kształtem

$$(n_1, n_2, \dots, n_{i_1-1}, r_1, n_{i_1} - r_1, n_{i_1+1}, \dots, n_{q-t}).$$

Jeśli $t = 1$, to zakończyliśmy dowód tej implikacji. Załóżmy zatem, że $t > 1$. Zapiszmy algebrę $\mathcal{B}_1$ w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11}^{(1)} & \cdots & \mathcal{B}_{1, q-t+1}^{(1)} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{B}_{q-t+1, q-t+1}^{(1)} \end{pmatrix}$$

odpowiadającej temu, że $\mathcal{B}_1$ jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{i_1-1}, r_1, n_{i_1} - r_1, n_{i_1+1}, \dots, n_{q-t})$. Wtedy $\mathcal{B}_{i_1+1, i_1+1}^{(1)} = \mathcal{A}_{i_1+1, i_1+1}^{(2)}$ i $\mathcal{B}_{i_2+1, i_2+1} = \mathcal{A}_{i_2, i_2}$. Zatem algebra $\mathcal{B}_{i_1+1, i_1+1}^{(1)}$ jest w postaci blokowo diagonalnej, gdy $s_{i_1} > 1$. W takim przypadku jak poprzednio pokazujemy, że za algebrę $\mathcal{B}_2$ możemy przyjąć algebrę otrzymaną przez zamianę bloku $\mathcal{B}_{i_1+1, i_1+1}^{(1)}$ algebry $\mathcal{B}_1$ blokiem

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}_2^{(1)} & M_{r_2 \times r_3}(K) & M_{r_2 \times r_4}(K) & \cdots & M_{r_2 \times r_{s_{i_1}+1}}(K) \\ & \mathcal{C}_3^{(1)} & 0_{r_3 \times r_4} & \cdots & 0_{r_3 \times r_{s_{i_1}+1}} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0_{r_{s_{i_1}} \times r_{s_{i_1}+1}} \\ & & & & \mathcal{C}_{s_{i_1}+1}^{(1)} \end{pmatrix}$$

i zachowanie pozostałych bloków. Natomiast, gdy $s_{i_1} = 1$ algebrą $\mathcal{B}_2$, która spełnia warunki podpunktu 3) twierdzenia, jest algebra otrzymana przez zamianę bloku $\mathcal{B}_{i_2+1, i_2+1}^{(1)}$ algebry $\mathcal{B}_1$ blokiem

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}_1^{(2)} & M_{u_1 \times u_2}(K) & M_{u_1 \times u_3}(K) & \cdots & M_{u_1 \times u_{s_{i_2}+1}}(K) \\ & \mathcal{C}_2^{(2)} & 0_{u_2 \times u_4} & \cdots & 0_{u_2 \times u_{s_{i_2}+1}} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0_{u_{s_{i_2}} \times u_{s_{i_2}+1}} \\ & & & & \mathcal{C}_{s_{i_2}+1}^{(2)} \end{pmatrix}$$

i zachowanie pozostałych bloków, gdzie $u_1, u_2, \dots, u_{s_{i_2}+1}$ są rozmiarami algebr macierzy, których podalgebrami są odpowiednio $\mathcal{C}_1^{(2)}, \mathcal{C}_2^{(2)}, \dots, \mathcal{C}_{s_{i_2}+1}^{(2)}$.

Ze względu na nierówność $\sum_{p=1}^b s_{i_p} \geq t$, związaną z liczbą diagonalnych bloków algebr $\mathcal{A}_{i_1, i_1}, \mathcal{A}_{i_2, i_2}, \dots, \mathcal{A}_{i_b, i_b}$, możemy przeprowadzić analogiczne rozumowanie do powyższego i otrzymać algebry $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \dots, \mathcal{B}_t$, które spełniają warunki podpunktu 3) twierdzenia. To pokazuje, że rozważana implikacja jest prawdziwa.

Aby zakończyć dowód, pokażemy, że z podpunktu 3) twierdzenia wynika podpunkt 1). Załóżmy więc, że dany jest ciąg algebr $\mathcal{B}_1 \subsetneq \mathcal{B}_2 \subseteq \dots \subsetneq \mathcal{B}_t$ taki, że dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ $\mathcal{B}_k$ jest D_{q-t+k} podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1^{(k)}, \ell_2^{(k)}, \dots, \ell_{q-t+k}^{(k)})$ I typu oraz algebra $\mathcal{B}_{k-1}$ zawiera się w algebrze $\mathcal{B}_k$ zgodnie z kształtem $(\ell_1^{(k)}, \ell_2^{(k)}, \dots, \ell_{q-t+k}^{(k)})$, gdzie przez $\mathcal{B}^0$ oznaczamy algebrę $\mathcal{A}$. Dla dowolnego $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ zapiszmy podalgebrę $\mathcal{B}_k$ w postaci blokowo trójkątnej

$$\mathcal{B}_k = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11}^{(k)} & \cdots & \mathcal{B}_{1, q-t+k}^{(k)} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{B}_{q-t+k, q-t+k}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (4.2.20)$$

która wynika z tego, że jest ona podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1^{(k)}, \ell_2^{(k)}, \dots, \ell_{q-t+k}^{(k)})$. Pokażemy, że wtedy algebra $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1^{(t)}, \ell_2^{(t)}, \dots, \ell_q^{(t)})$ w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{11} & \cdots & \mathcal{A}'_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}'_{qq} \end{pmatrix}, \quad (4.2.21)$$

gdzie $\mathcal{A}'_{11} = \mathcal{B}_{11}^{(t)}$, $\mathcal{A}'_{22} = \mathcal{B}_{22}^{(t)}$, $\dots$, $\mathcal{A}'_{qq} = \mathcal{B}_{qq}^{(t)}$, natomiast $\mathcal{A}'_{rs} = 0_{\ell_r^{(t)} \times \ell_r^{(t)}}$ lub $\mathcal{A}'_{rs} = M_{\ell_r^{(t)} \times \ell_r^{(t)}}(K)$ dla dowolnych liczb naturalnych r, s spełniających nierówności $1 \leq r < s \leq q$. Zatem każdy z bloków algebry $\mathcal{A}$ w przedstawieniu (4.2.21) będzie równy pewnemu blokowi algebry $\mathcal{B}_t$ w przedstawieniu (4.2.20) lub będzie zerowy. Wówczas za podalgebrę $\mathcal{B}$ z podpunktu 1) twierdzenia będziemy mogli przyjąć $\mathcal{B}_t$.

Algebry $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}_1$ są odpowiednio D_{q-t} podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{q-t})$ I typu oraz D_{q-t+1} podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1^{(1)}, \ell_2^{(1)}, \dots, \ell_{q-t+1}^{(1)})$ I typu. Ponieważ $\mathcal{A}$ zawiera się w $\mathcal{B}_1$ zgodnie z kształtem $(\ell_1^{(1)}, \ell_2^{(1)}, \dots, \ell_{q-t+1}^{(1)})$, to $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1^{(1)}, \ell_2^{(1)}, \dots, \ell_{q-t+1}^{(1)})$. Na mocy Lematu 4.2.10 postać blokowo trójkątna algebry $\mathcal{A}$, która odpowiada kształtowi $(\ell_1^{(1)}, \ell_2^{(1)}, \dots, \ell_{q-t+1}^{(1)})$, różni się od postaci blokowo trójkątnej algebry $\mathcal{B}_1$ ze wzoru (4.2.20) jednym blokiem nie będącym na głównej przekątnej. W algebrze $\mathcal{A}$ jest on zerowy. Dla dowolnych liczb naturalnych r, s spełniających nierówności $1 \leq r < s \leq q-t+1$ blok $\mathcal{B}_{rs}^{(1)}$ jest równy $M_{\ell_r^{(1)} \times \ell_s^{(1)}}(K)$. Udowodniliśmy więc, że jeśli $t = 1$, to algebra $\mathcal{A}$ jest w postaci (4.2.21).

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy $t > 1$. Zgodnie z tym, co pokazaliśmy w poprzednim akapicie, algebra $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1^{(1)}, \ell_2^{(1)}, \dots, \ell_{q-t+1}^{(1)})$ w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}''_{11} & \cdots & \mathcal{A}''_{1, q-t+1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}''_{q-t+1, q-t+1} \end{pmatrix}, \quad (4.2.22)$$

gdzie $\mathcal{A}_{11}'' = \mathcal{B}_{11}^{(1)}$, $\mathcal{A}_{22}'' = \mathcal{B}_{22}^{(1)}$, $\dots$, $\mathcal{A}_{q-t+1, q-t+1}'' = \mathcal{B}_{q-t+1, q-t+1}^{(1)}$, natomiast $\mathcal{A}_{rs}'' = 0_{\ell_r^{(1)} \times \ell_s^{(1)}}$ lub $\mathcal{A}_{rs}'' = M_{\ell_r^{(1)} \times \ell_s^{(1)}}(K) = \mathcal{B}_{rs}^{(1)}$ dla dowolnych liczb naturalnych r, s spełniających nierówności $1 \leq r < s \leq q - t + 1$. Ponieważ algebra $\mathcal{B}_1$ zawiera się w $\mathcal{B}_2$ zgodnie z kształtem $(\ell_1^{(2)}, \ell_2^{(2)}, \dots, \ell_{q-t+2}^{(2)})$, to na mocy Lematu 4.2.10 istnieje liczba $u \in \{1, 2, \dots, q - t + 1\}$, dla której

$$\ell_1^{(1)} = \ell_1^{(2)}, \dots, \ell_{u-1}^{(1)} = \ell_{u-1}^{(2)}, \ell_u^{(1)} = \ell_u^{(2)} + \ell_{u+1}^{(2)}, \ell_{u+1}^{(1)} = \ell_{u+2}^{(2)}, \dots, \ell_{q-1}^{(1)} = \ell_q^{(2)}$$

oraz blok $\mathcal{B}_{uu}^{(1)}$ algebry $\mathcal{B}_1$ jest równy $\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{uu}^{(2)} & 0_{\ell_u^{(2)} \times \ell_{u+1}^{(2)}} \\ 0_{\ell_{u+1}^{(2)} \times \ell_u^{(2)}} & \mathcal{B}_{u+1, u+1}^{(2)} \end{pmatrix}$. Co więcej, algebra $\mathcal{B}_2$ powstaje z algebry $\mathcal{B}_1$ przez zastąpienie bloku $\mathcal{B}_{uu}^{(1)}$ blokiem

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{uu}^{(2)} & M_{\ell_u^{(2)} \times \ell_{u+1}^{(2)}}(K) \\ 0_{\ell_{u+1}^{(2)} \times \ell_u^{(2)}} & \mathcal{B}_{u+1, u+1}^{(2)} \end{pmatrix}$$

i zachowanie pozostałych bloków $\mathcal{B}_1$. Z równości $\ell_u^{(1)} = \ell_u^{(2)} + \ell_{u+1}^{(2)}$ oraz z przedstawienia algebry $\mathcal{A}$ w postaci (4.2.22) otrzymujemy, że

- $\mathcal{A}_{uu}'' = \mathcal{B}_{uu}^{(1)}$,
- dla dowolnej liczby naturalnej $r \in \{1, 2, \dots, u - 1\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ru}'' &= M_{\ell_r^{(1)} \times \ell_u^{(1)}}(K) = \begin{pmatrix} M_{\ell_r^{(2)} \times \ell_u^{(2)}}(K) & M_{\ell_r^{(2)} \times \ell_{u+1}^{(2)}}(K) \end{pmatrix} \quad \text{lub} \\ \mathcal{A}_{ru}'' &= 0_{\ell_r^{(1)} \times \ell_u^{(1)}} = \begin{pmatrix} 0_{\ell_r^{(2)} \times \ell_u^{(2)}} & 0_{\ell_r^{(2)} \times \ell_{u+1}^{(2)}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

- dla dowolnej liczby naturalnej $s \in \{u + 1, u + 2, \dots, q - 1\}$

$$\mathcal{A}_{us}'' = M_{\ell_u^{(1)} \times \ell_s^{(1)}}(K) = \begin{pmatrix} M_{\ell_u^{(2)} \times \ell_{s+1}^{(2)}}(K) \\ M_{\ell_{u+1}^{(2)} \times \ell_{s+1}^{(2)}}(K) \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad \mathcal{A}_{us}'' = 0_{\ell_u^{(1)} \times \ell_s^{(1)}} = \begin{pmatrix} 0_{\ell_u^{(2)} \times \ell_{s+1}^{(2)}} \\ 0_{\ell_{u+1}^{(2)} \times \ell_{s+1}^{(2)}} \end{pmatrix}.$$

Dodatkowo, każdy z bloków $\mathcal{A}_{rs}''$ algebry $\mathcal{A}$, gdy $r \neq u$ i $s \neq u$, jest blokiem zerowym lub jest równy blokowi $\mathcal{B}_{rs}^{(1)}$ algebry $\mathcal{B}_1$. Ostatni z wymienionych bloków, ze względu na zależność między algebraми $\mathcal{B}_1$ oraz $\mathcal{B}_2$, jest równy pewnemu blokowi algebry $\mathcal{B}_2$. Opisane relacje pozwalają zapisać algebrę $\mathcal{A}$ w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}''' & \dots & \mathcal{A}_{1, q-t+2}''' \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{q-t+1, q-t+2}''' \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{A}_{11}''' = \mathcal{B}_{11}^{(2)}$, $\mathcal{A}_{22}''' = \mathcal{B}_{22}^{(2)}$, $\dots$, $\mathcal{A}_{q-t+2, q-t+2}''' = \mathcal{B}_{q-t+2, q-t+2}^{(2)}$, natomiast $\mathcal{A}_{rs}''' = 0_{\ell_r^{(2)} \times \ell_s^{(2)}}$ lub $\mathcal{A}_{rs}''' = \mathcal{B}_{rs}^{(2)} = M_{\ell_r^{(2)} \times \ell_s^{(2)}}(K)$ dla dowolnych liczb naturalnych r, s spełniających nierówności $1 \leq r < s \leq q - t + 2$.

Kontynuując przedstawioną powyżej procedurę, otrzymamy przedstawienie algebry $\mathcal{A}$ w postaci (4.2.21). To kończy dowód. $\square$

4.3 Postacie blokowe D_q podalgebr $M_n(K)$

Ten podrozdział dotyczy sposobów przedstawienia pewnych D_q podalgebr $M_n(K)$ w postaciach blokowych. Zaczniemy go od pokazania, że dla każdej algebry $\mathcal{A}$, która spełnia jeden z równoważnych warunków z Lematu 4.2.10, istnieją różne ciągi $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$, dla których $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ i $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$. Inaczej mówiąc, algebra $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$, która ma różne przedstawienia w postaciach blokowych. Następnie udowodnimy, że w pewnych klasach D_q podalgebr $M_n(K)$ algebry mogą być zapisane w dokładnie jednej postaci blokowej.

Stwierdzenie 4.3.1. *Niech $\mathcal{A}$ będzie D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ I typu w postaci blokowo trójkątnej*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{qq} \end{pmatrix}. \quad (4.3.1)$$

Założmy, że dla pewnej liczby $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ blok $\mathcal{A}_{ii}$ jest równy $\begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 & 0_{s \times t} \\ 0_{t \times s} & \mathcal{C}_2 \end{pmatrix}$, gdzie $\mathcal{C}_1$ oraz $\mathcal{C}_2$ są podalgebrami odpowiednio $M_s(K)$ oraz $M_t(K)$, natomiast s, t są liczbami naturalnymi spełniającymi równość $s+t = n_i$. Wówczas $\mathcal{A}$ jest również podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ różnego od $(n_1, n_2, \dots, n_q)$.

Dowód. Zaczniemy od przypadku, gdy $i = 1$. Wtedy blok $\mathcal{A}_{11}$ jest równy $\begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 & 0_{s \times t} \\ 0_{t \times s} & \mathcal{C}_2 \end{pmatrix}$, gdzie algebry $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ oraz liczby s, t spełniają warunki stwierdzenia. Wykorzystamy go do pokazania, że $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(s, t + n_2, n_3, n_4, \dots, n_q)$. W tym celu rozważmy algebry

$$\mathcal{A}'_{11} = \mathcal{C}_1, \quad \mathcal{A}'_{22} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_2 & M_{t \times n_2}(K) \\ 0_{n_2 \times t} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}'_{33} = \mathcal{A}_{33}, \quad \mathcal{A}'_{44} = \mathcal{A}_{44}, \quad \dots, \quad \mathcal{A}'_{qq} = \mathcal{A}_{qq}$$

oraz podprzestrzenie liniowe

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_{12} &= \begin{pmatrix} 0_{s \times t} & M_{s \times n_2}(K) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}'_{13} = M_{s \times n_3}(K), \quad \dots, \quad \mathcal{A}'_{1q} = M_{s \times n_q}(K), \\ \mathcal{A}'_{2u} &= \begin{pmatrix} M_{t \times n_u}(K) \\ M_{n_2 \times n_u}(K) \end{pmatrix} \quad \text{dla } u \in \{3, 4, \dots, q\}, \\ \mathcal{A}'_{uv} &= \mathcal{A}_{uv} \quad \text{dla } 3 \leq u < v \leq q. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Wtedy z równości $s+t = n_1$ oraz z tego, że $\mathcal{A}_{11} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 & 0_{s \times t} \\ 0_{t \times s} & \mathcal{C}_2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}_{12} = M_{n_1 \times n_2}(K)$ wynikają następujące zależności

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{11} & \mathcal{A}'_{12} \\ 0_{(t+n_2) \times s} & \mathcal{A}'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 & 0_{s \times t} & M_{s \times n_2}(K) \\ 0_{t \times s} & \mathcal{C}_2 & M_{t \times n_2}(K) \\ 0_{n_2 \times s} & 0_{n_2 \times t} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Podobnie uzasadniamy, że

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{13} \\ \mathcal{A}'_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{s \times n_3}(K) \\ M_{(t+n_2) \times n_3}(K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{23} \end{pmatrix}$$

i kolejno dowodzimy równości

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{14} \\ \mathcal{A}'_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{14} \\ \mathcal{A}_{24} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{15} \\ \mathcal{A}'_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{15} \\ \mathcal{A}_{25} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{1q} \\ \mathcal{A}'_{2q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1q} \\ \mathcal{A}_{2q} \end{pmatrix}.$$

Z pokazanych wyżej tożsamości oraz ze wzoru (4.3.2) dostajemy, że

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{11} & \dots & \mathcal{A}'_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}'_{qq} \end{pmatrix}.$$

Otrzymane przedstawienie blokowe algebry $\mathcal{A}$ pokazuje, że jest ona również podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(s, t + n_2, n_3, n_4, \dots, n_q)$ różnego od $(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Pokazaliśmy, że stwierdzenie jest prawdziwe dla $i = 1$.

W sytuacji, gdy $i > 1$ postępujemy podobnie. Określamy wtedy algebry

$$\begin{aligned} \mathcal{A}''_{11} &= \mathcal{A}_{11}, \quad \mathcal{A}''_{22} = \mathcal{A}_{22}, \quad \dots, \quad \mathcal{A}''_{i-2, i-2} = \mathcal{A}_{i-2, i-2}, \quad \mathcal{A}''_{i-1, i-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{i-1, i-1} & M_{n_{i-1} \times s}(K) \\ 0_{s \times n_{i-1}} & \mathcal{C}_1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}''_{ii} &= \mathcal{C}_2, \quad \mathcal{A}''_{i+1, i+1} = \mathcal{A}_{i+1, i+1}, \quad \mathcal{A}''_{i+2, i+2} = \mathcal{A}_{i+2, i+2}, \quad \dots, \quad \mathcal{A}''_{qq} = \mathcal{A}_{qq} \end{aligned}$$

oraz przestrzenie liniowe

$$\begin{aligned} \mathcal{A}''_{i-1, i} &= \begin{pmatrix} M_{n_{i-1} \times t}(K) \\ 0_{s \times t} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}''_{i-1, i+1} = \begin{pmatrix} M_{n_{i-1} \times n_{i+1}}(K) \\ M_{s \times n_{i+1}}(K) \end{pmatrix}, \dots, \mathcal{A}''_{i-1, q} = \begin{pmatrix} M_{n_{i-1} \times n_q}(K) \\ M_{s \times n_q}(K) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}''_{u, i-1} &= \begin{pmatrix} M_{n_u \times n_{i-1}}(K) & M_{n_u \times s}(K) \end{pmatrix} \quad \text{dla } u \in \{1, 2, \dots, i-2\}, \\ \mathcal{A}''_{ui} &= M_{n_u \times t}(K) \quad \text{dla } u \in \{1, 2, \dots, i-2\}, \\ \mathcal{A}''_{iv} &= M_{t \times n_v}(K) \quad \text{dla } v \in \{i+1, i+2, \dots, q\}, \\ \mathcal{A}''_{uv} &= \mathcal{A}_{uv} \quad \text{dla } (u, v) \in \{(l, k) : 1 \leq l < k \leq i-2\} \\ &\quad \cup \{(l, k) : 1 \leq l \leq i-2 \wedge i+1 \leq k \leq q\} \\ &\quad \cup \{(l, k) : i+1 \leq l < k \leq q\}. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Z równości $s + t = n_i$ oraz z tego, że $\mathcal{A}_{i-1, i} = M_{n_{i-1} \times n_i}(K)$, $\mathcal{A}_{ii} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 & 0_{s \times t} \\ 0_{t \times s} & \mathcal{C}_2 \end{pmatrix}$ otrzymujemy następujące zależności

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}''_{i-1, i-1} & \mathcal{A}''_{i-1, i} \\ 0_{t \times (n_{i-1} + s)} & \mathcal{A}''_{ii} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{i-1, i-1} & M_{n_{i-1} \times s}(K) & M_{n_{i-1} \times t}(K) \\ 0_{s \times n_{i-1}} & \mathcal{C}_1 & 0_{s \times t} \\ 0_{t \times n_{i-1}} & 0_{t \times s} & \mathcal{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{i-1, i-1} & \mathcal{A}_{i-1, i} \\ 0_{n_i \times n_{i-1}} & \mathcal{A}_{ii} \end{pmatrix}.$$

W podobny sposób uzasadniamy równości

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}''_{i-1, i+1} \\ \mathcal{A}''_{i, i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{(n_{i-1} + s) \times n_{i+1}}(K) \\ M_{t \times n_{i+1}}(K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{i-1, i+1} \\ \mathcal{A}_{i, i+1} \end{pmatrix}$$

i następnie pokazujemy, że

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{i-1,i+2}'' \\ \mathcal{A}_{i,i+2}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{i-1,i+2} \\ \mathcal{A}_{i,i+2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{i-1,q}'' \\ \mathcal{A}_{i,q}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{i-1,q} \\ \mathcal{A}_{i,q} \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{A}_{i-1,1}'' \quad \mathcal{A}_{i,1}'') = (\mathcal{A}_{i-1,1} \quad \mathcal{A}_{i,1}), \dots, (\mathcal{A}_{i-1,i-2}'' \quad \mathcal{A}_{i,i-2}'') = (\mathcal{A}_{i-1,i-2} \quad \mathcal{A}_{i,i-2}).$$

Z otrzymanych powyżej tożsamości oraz z ostatniej równości w formule (4.3.3) możemy zapisać

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}'' & \dots & \mathcal{A}_{1q}'' \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{qq}'' \end{pmatrix}.$$

Powyższe przedstawienie algebry $\mathcal{A}$ pokazuje, że jest ona także podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_{i-2}, n_{i-1}+s, t, n_{i+1}, n_{i+2}, \dots, n_q)$ różnego od $(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Dowód został zakończony. $\square$

Przykład 4.3.2. Ponieważ algebra $\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$ jest przemienną podalgebrą $M_2(K)$ maksymalnego wymiaru, to możemy rozpatrzeć algebry

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline K & K & K \\ \hline 0 & K & 0 \\ \hline 0 & 0 & K \\ \hline \end{array} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline K & 0 & K & K & K \\ \hline 0 & K & K & K & K \\ \hline 0 & 0 & K & 0 & K \\ \hline 0 & 0 & 0 & K & K \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & K \\ \hline \end{array} \right),$$

które są odpowiednio D_2 podalgebrą $M_3(K)$ kształtu $(1, 2)$ I typu i D_3 podalgebrą $M_5(K)$ kształtu $(2, 2, 1)$ I typu. Tak określona algebra $\mathcal{A}$ jest również podalgebrą $M_3(K)$ kształtu $(2, 1)$ w postaci blokowej

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline K & K & K \\ \hline 0 & K & 0 \\ \hline 0 & 0 & K \\ \hline \end{array} \right).$$

Natomiast algebra $\mathcal{B}$ jest także podalgebrą $M_5(K)$ kształtu $(1, 3, 1)$ oraz podalgebrą $M_5(K)$ kształtu $(3, 1, 1)$ odpowiednio w postaciach blokowo trójkątnych

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline K & 0 & K & K & K \\ \hline 0 & K & K & K & K \\ \hline 0 & 0 & K & 0 & K \\ \hline 0 & 0 & 0 & K & K \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & K \\ \hline \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline K & 0 & K & K & K \\ \hline 0 & K & K & K & K \\ \hline 0 & 0 & K & 0 & K \\ \hline 0 & 0 & 0 & K & K \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & K \\ \hline \end{array} \right).$$

W przypadku algebry $\mathcal{B}$ dowód Stwierdzenia 4.3.1 prowadzi do jednej z powyższych postaci blokowych w zależności od tego, czy za liczbę i ze Stwierdzenia 4.3.1 przyjmiemy 1, czy przyjmiemy 2.

Na mocy Wniosku 3.5.7 ciąg $(1, 2)$ wyznacza D_2 podalgebrę $M_3(K)$ III typu. Zatem rozpatrywana w ostatnim przykładzie algebra $\mathcal{A}$ jest D_2 podalgebrą $M_3(K)$ maksymalnego wymiaru. Podobnie algebra $\mathcal{B}$ z tego samego przykładu jest D_3 podalgebrą $M_5(K)$ maksymalnego wymiaru. Wynika to z Twierdzenia 3.5.5.

W Przykładzie 4.3.2 wskazaliśmy różne przedstawienia w postaci blokowej pewnej D_2 podalgebry $M_3(K)$ zawartej w $U_3(K)$ oraz D_3 podalgebry $M_5(K)$ zawartej w $U_5(K)$. W Uwadze 4.3.3 pokażemy, że dla dowolnej liczby naturalnej $q \geq 2$ oraz dowolnej liczby $n \in \{q+1, q+2, \dots, 4q-1\}$ istnieje D_q podalgebra $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru zawarta w $U_n(K)$, która też ma różne przedstawienia w postaci blokowej. Następnie udowodnimy, że dla liczb naturalnych q i n takich, że $q = n$ lub $n \geq 4q$ każda D_q podalgebra $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru, która zawiera się w $U_n(K)$, ma jednoznacznie wyznaczoną postać blokową.

W przypadku, gdy $q = 2$, to z opisanym zagadnieniem związane jest twierdzenie [50, Theorem 15]. Pokazano tam, że blokowo trójkątne D_2 podalgebry $U_n(K)$, które są maksymalnego wymiaru, na diagonalnych blokach muszą mieć algebry przemienne. Ze względu na drobny błąd w lemacie poprzedzającym w pracy [50] wspomniane twierdzenie (prawa strona nierówności w [50, Lemma 12] powinna być większa o 1), teza jaka w nim się znajduje nie jest prawdziwa dla $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Wynika to z tego, że dla $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$, możemy podobnie jak w Przykładzie 4.3.2, skonstruować D_2 podalgebry $U_n(K)$ maksymalnego wymiaru, w których jeden z diagonalnych bloków jest algebrą nieprzemiennej.

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 8$ przywołane we wcześniejszym akapicie twierdzenie pozostaje prawdziwe. Możemy to uzasadnić, wykorzystując Twierdzenie 4.3.5. Istotnie, wynika z niego, że dla każdej D_2 podalgebra $U_n(K)$ maksymalnego wymiaru, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną większą lub równą 8, istnieje dokładnie jedno przedstawienie tej algebry w postaci blokowo trójkątnej. Na mocy Wniosku 4.1.5 w takim przedstawieniu diagonalne bloki są algebrami przemiennymi.

Uwaga 4.3.3. Niech q będzie dowolną liczbą naturalną większą lub równą 2. Na mocy Twierdzenia 3.5.5 następujące ciągi długości q

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{(1, 1, \dots, 1, 2)}_{q-1 \text{ razy}}, & \underbrace{(1, 1, \dots, 1, 2, 2)}_{q-2 \text{ razy}}, & \dots, & \underbrace{(2, 2, \dots, 2)}_{q \text{ razy}}, \\ \underbrace{(2, 2, \dots, 2, 3)}_{q-1 \text{ razy}}, & \underbrace{(2, 2, \dots, 2, 3, 3)}_{q-2 \text{ razy}}, & \dots, & \underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{q \text{ razy}}, \\ \underbrace{(3, 3, \dots, 3, 4)}_{q-1 \text{ razy}}, & \underbrace{(3, 3, \dots, 3, 4, 4)}_{q-2 \text{ razy}}, & \dots, & \underbrace{(3, 4, \dots, 4)}_{q-1 \text{ razy}} \end{array}$$

wyznaczają D_q podalgebry odpowiednio algebr $M_{q+1}(K)$, $M_{q+2}(K)$, $\dots$, $M_{4q-1}(K)$ III typu. Wiemy, że $\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$ jest przemiennej podalgebrą $M_2(K)$ maksymalnego wymiaru. Zatem możemy rozważyć D_q podalgebrę $M_{q+1}(K)$ kształtu $(1, 1, \dots, 1, 2)$ III typu, której diagonalnym blokiem odpowiadającym liczbie 2 w powyższym ciągu jest algebra $\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$, natomiast pozostałe diagonalne bloki są równe K . Z definicji wynika, że jest ona D_q podalgebrą $M_{q+1}(K)$ maksymalnego wymiaru, która zawiera się w $U_{q+1}(K)$. Co więcej, ze Stwierdzenia 4.3.1 otrzymujemy, że rozpatrywana algebra jest również podalgebrą $M_{q+1}(K)$ pewnego kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ różnego od $(1, 1, \dots, 1, 2)$. Podobnie,

wykorzystując algebry $\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$, możemy wskazać przykłady D_q podalgebr $M_{q+2}(K)$, $M_{q+3}(K)$, $\dots$, $M_{4q-1}(K)$ maksymalnych wymiarów, które mają różne przedstawienia w postaci blokowej.

Lemat 4.3.4. *Niech $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ będzie ciągiem, przy pomocy którego możemy określić D_q podalgebrę $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu. Załóżmy dodatkowo, że istnieje liczba $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, dla której $n_i \in \{2, 3\}$. Wtedy $n < 4q$.*

Dowód. Niech $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ będzie ciągiem, który spełnia założenia lematu. Wówczas z Twierdzenia 3.5.5 wynika, że istnieje permutacja σ zbioru $\{1, 2, \dots, q\}$ taka, że ciąg $(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, \dots, n_{\sigma(q)})$ jest równy

$$\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{a \text{ razy}}, \underbrace{(2, 2, \dots, 2)}_{b \text{ razy}} \quad \text{lub} \quad \underbrace{(2, 2, \dots, 2)}_{c \text{ razy}}, \underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{d \text{ razy}}, \underbrace{(4, 4, \dots, 4)}_{e \text{ razy}},$$

gdzie a, b, c, d, e są liczbami ze zbioru $\{0, 1, \dots, q\}$ spełniającymi równości $a + b = q$ oraz $c + d + e = q$. Zatem liczba $n = n_1 + n_2 + \dots + n_q$ jest równa

$$a + 2b \quad \text{lub} \quad 2c + 3d + 4e. \quad (4.3.4)$$

W drugim z powyższych przypadków, z równości $c + d + e = q$ oraz $n = 2c + 3d + 4e$ wynika, że

$$n = 2c + 3d + 4e \leq 4(c + d + e) \leq 4q.$$

Ponieważ ciąg $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ jest różny od $(4, 4, \dots, 4)$, to liczba $n = \sum_{j=1}^q n_j$ jest różna od $4q$. W rozważanym przypadku spełniona jest więc nierówność $n < 4q$.

Podobnie sprawdzamy, że $n \leq 2q < 4q$, gdy spełniona jest pierwszy z przypadków w formule (4.3.4). To kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 4.3.5. *Niech n i q będą liczbami naturalnymi większymi lub równymi 2 takimi, że $n = q$ lub $n \geq 4q$. Niech $\mathcal{A}$ będzie D_q podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru zawartą w $U_n(K)$. Wtedy $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_n(K)$ dokładnie jednego kształtu.*

Dowód. Jeżeli $n = q$, to $\mathcal{A} = U_n(K)$ i algebra $\mathcal{A}$ nie jest podalgebrą $M_n(K)$ żadnego innego kształtu niż $(1, 1, \dots, 1)$. Zatem w tym przypadku twierdzenie jest prawdziwe.

W dalszej części dowodu będziemy zakładali, że $n \geq 4q$. Na mocy Twierdzenia 4.1.4 algebra $\mathcal{A}$ jest pewną D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{qq} \end{pmatrix}. \quad (4.3.5)$$

Pokażemy, że $\mathcal{A}$ nie jest podalgebrą $M_n(K)$ żadnego innego kształtu niż $(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Przypuśćmy przeciwnie, że $\mathcal{A}$ jest także podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ różnego

od $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{11} & \cdots & \mathcal{A}'_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}'_{qq} \end{pmatrix}. \quad (4.3.6)$$

Rozpatrzmy ciągi $(N_0, N_1, \dots, N_q)$ oraz $(L_0, L_1, \dots, L_q)$ określone jak te z Uwagi 4.2.7. Podobnie jak w dowodzie Lematu 4.2.9 oraz Twierdzenia 4.2.13 powiążemy z nimi pewne idempotenty. Wykorzystamy je do pokazania, że jeden z diagonalnych bloków algebry $\mathcal{A}$ w postaci (4.3.5) jest rozkładalny. Ponieważ $N_0 = 0 = L_0$ oraz $(n_1, n_2, \dots, n_q) \neq (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$, to istnieje liczba $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, dla której

$$N_0 = L_0, \quad \dots, \quad N_{i-1} = \sum_{k=1}^{i-1} n_k = \sum_{k=1}^{i-1} \ell_k = L_{i-1}, \quad N_i = \sum_{k=1}^i n_k \neq \sum_{k=1}^i \ell_k = L_i.$$

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy $L_i < N_i$. Ponieważ $I_{\ell_1} \in \mathcal{A}'_{11}$, $I_{\ell_2} \in \mathcal{A}'_{22}$, $\dots$, $I_{\ell_i} \in \mathcal{A}'_{ii}$, to z postaci blokowej (4.3.6) wynika, że idempotent $\sum_{k=1}^{L_i} e_{kk}$ należy do algebry $\mathcal{A}$. Podobnie idempotent $\sum_{k=1}^{N_{i-1}} e_{kk}$ należy do algebry $\mathcal{A}$. Zatem należy do niej element

$$\sum_{k=1}^{L_i} e_{kk} - \sum_{k=1}^{N_{i-1}} e_{kk}.$$

Ponieważ $N_{i-1} = L_{i-1}$ oraz $L_i < N_i$, to powyższy element w postaci (4.3.5) ma niezerowe wyrazy jedynie w miejscu i -tego diagonalnego bloku. Pozwala to zastosować Lemat 4.2.11. Wynika z niego, że algebra $\mathcal{A}_{ii}$ jest w postaci blokowej $\begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 & 0_{s \times t} \\ 0_{t \times s} & \mathcal{C}_2 \end{pmatrix}$ dla pewnych przemiennej podalgebr $\mathcal{C}_1$ oraz $\mathcal{C}_2$ odpowiednio algebr $M_s(K)$ oraz $M_t(K)$, gdzie $s = L_i - N_{i-1}$, $t = N_i - L_i$. Algebra $\mathcal{A}_{ii}$ jest przemiennej podalgebrą $M_{n_i}(K)$ maksymalnego wymiaru, więc $n_i \in \{2, 3\}$ na mocy Stwierdzenia 2.1.5. Teraz z Lematu 4.3.4 otrzymujemy nierówność $n < 4q$, co jest sprzeczne z założeniem. To kończy tę część dowodu.

Założmy zatem, że $L_i > N_i$. Ponieważ ciągi $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ oraz $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$ wyznaczają kształty podalgebr $M_n(K)$, to $N_q = n = L_q$. Istnieje więc liczba $j \in \{1, 2, \dots, q-i\}$ taka, że

$$L_i > N_i, \quad \dots, \quad L_{i+j-1} > N_{i+j-1}, \quad L_{i+j} \leq N_{i+j}.$$

Podobnie jak we wcześniejszym przypadku pokazujemy, że idempotenty

$$\sum_{k=1}^{L_{i+j-1}} e_{kk} \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{N_{i+j-1}} e_{kk}$$

należą do algebry $\mathcal{A}$. Zatem do algebry $\mathcal{A}$ należy element

$$\sum_{k=1}^{L_{i+j-1}} e_{kk} - \sum_{k=1}^{N_{i+j-1}} e_{kk}.$$

Ze względu na nierówności $N_{i+j-1} < L_{i+j-1} < L_{i+j} \leq N_{i+j}$ powyższy element ma niezerowe wyrazy w $(i+j)$ -tym diagonalnym bloku ze wzoru (4.3.5). Stąd wynika, że do algebry $\mathcal{A}_{i+j}$ możemy zastosować Lemat 4.2.11. Jak poprzednio z niego, a następnie z Lematu 4.3.4 otrzymujemy, że $n < 4q$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Rozdział 5

Algebry rozwiązalne, nilpotentne oraz ich uogólnienia

W tym rozdziale będziemy badali algebry, które z nawiasem Liego będącym komutatorem elementów, są nilpotentnymi algebrami Liego lub rozwiązalnymi algebrami Liego. Będziemy rozpatrywali również uogólnienia powyższych klas algebr.

Główne wyniki uzyskamy w czwartym podrozdziale. Dotyczą one podalgebr $M_n(K)$ spełniających tożsamość wielomianową

$$[[x_1, y_1], z_1][x_2, y_2], z_2] \dots [x_q, y_q], z_q] = 0, \quad (5.0.1)$$

gdzie q jest dowolną liczbą naturalną, większą lub równą 2. W kilku początkowych podrozdziałach wprowadzimy definicje oraz przedstawimy rezultaty, które poza Stwierdzeniem 5.1.10 oraz Przykładem 5.2.6 pochodzą z artykułów [45], [49] oraz [50]. Pokazane w tych podrozdziałach wyniki są motywacją do dalszych rozważań z tego rozdziału.

W pierwszym podrozdziale przywołamy twierdzenia dotyczące maksymalnego wymiaru podalgebry $M_n(K)$ spełniającej tożsamość wielomianową

$$\left[\dots [x_1, x_2], x_3], \dots, x_q \right] = 0 \quad (5.0.2)$$

dla dowolnej liczby naturalnej $q \geq 3$. Następnie pokażemy podobieństwa oraz różnice między algebrami spełniającymi tożsamość wielomianową (5.0.2) i D_q algebrami.

Drugi podrozdział dotyczy podalgebr $M_n(K)$, które z nawiasem Liego, będącym komutatorem elementów, są rozwiązalnymi algebrami Liego indeksu q . Przykładami takich podalgebr są $D_{2^{q-1}}$ podalgebry $M_n(K)$. Przy dodatkowych założeniach wspomniane dwie klasy podalgebr są sobie równe (patrz [49, Theorem 4] i [50, Theorem 4]). Z tego powodu interesujące są przykłady podane w [32], rozróżniające te klasy. Przywołamy je w tym podrozdziale, a następnie przedstawimy własną konstrukcję. Wymiary uzyskanych podalgebr będą stosunkowo małe. Zatem pytanie o maksymalny wymiar podalgebry $M_n(K)$, która z nawiasem Liego, będącym komutatorem elementów, jest rozwiązalną algebrą Liego indeksu q (patrz [45, 9. Open Questions]), pozostaje otwarte. W przypadku, gdy $q = 2$

w czwartym podrozdziale znajdziemy przedział, do którego należy rozważany w pytaniu wymiar. Dla małych liczb n jest on wąski.

W trzecim podrozdziale będziemy rozpatrywali pewną klasę podalgebr algebry macierzy górnotrójkątnych $n \times n$, o wyrazach w algebrach spełniających wybrane tożsamości wielomianowe. Rozważane podalgebry są związane z konstrukcją przedstawioną we wcześniejszym podrozdziale.

5.1 Ln_q podalgebry $\mathbf{M}_n(K)$

Podrozdział ten dotyczy algebr, które z nawiasem Liego będącym komutatorem elementów, są nilpotentnymi algebrami Liego. Zaczniemy od definicji.

Nich $\mathcal{A}$ będzie algebrą. Określmy indukcyjnie ciąg

$$\mathfrak{C}^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}, \quad \mathfrak{C}^{q+1}(\mathcal{A}) = [\mathfrak{C}^q(\mathcal{A}), \mathcal{A}] = \{[x, y] : x \in \mathfrak{C}^q(\mathcal{A}), y \in \mathcal{A}\}, \quad (5.1.1)$$

gdzie q jest dowolną liczbą całkowitą nieujemną.

Definicja 5.1.1. Powiemy, że algebra $\mathcal{A}$ jest Lie-nilpotentna indeksu q , jeśli przestrzeń liniowa $\mathcal{A}$ z nawiasem Liego równym komutatorowi elementów jest nilpotentną algebrą Liego indeksu q , to znaczy $\mathfrak{C}^q(\mathcal{A}) = \{0\}$. Będziemy pisać w skrócie, że $\mathcal{A}$ jest Ln_q algebrą.

Możemy równoważnie powiedzieć, że $\mathcal{A}$ jest Ln_q algebrą, jeśli dla dowolnych elementów $a_1, a_2, \dots, a_{q+1} \in \mathcal{A}$ spełniona jest równość

$$\left[\dots \left[[a_1, a_2], a_3 \right], \dots, a_{q+1} \right] = 0.$$

Przykład 5.1.2. Niech q i n będą liczbami naturalnymi takimi, że $2 \leq q \leq n$. Wtedy dla dowolnych liczb naturalnych $n_1, n_2, \dots, n_q$ spełniających równość $\sum_{i=1}^q n_i = n$ algebra

$$\mathcal{A} = \left\{ \alpha I_n + \begin{pmatrix} 0_{n_1} & X_{12} & \dots & X_{1q} \\ & 0_{n_2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & X_{q-1,q} \\ & & & 0_{n_q} \end{pmatrix} : \alpha \in K, X_{ij} \in \mathbf{M}_{n_i \times n_j}(K), \text{ gdzie } 1 \leq i < j \leq q \right\}$$

jest Ln_{q-1} algebrą. Istotnie, niech $A_1, A_2, \dots, A_q$ będą dowolnymi elementami algebry $\mathcal{A}$. Z określenia algebry $\mathcal{A}$ istnieją elementy $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \in K$ oraz macierze

$$N_1, N_2, \dots, N_q \in \begin{pmatrix} 0_{n_1} & \mathbf{M}_{n_1 \times n_2}(K) & \dots & \mathbf{M}_{n_1 \times n_q}(K) \\ & 0_{n_2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \mathbf{M}_{n_{q-1} \times n_q}(K) \\ & & & 0_{n_q} \end{pmatrix}$$

takie, że $A_1 = \alpha_1 I_n + N_1, A_2 = \alpha_2 I_n + N_2, \dots, A_q = \alpha_q I_n + N_q$. Z postaci blokowo trójkątnych macierzy $N_1, N_2, \dots, N_q$ wynika, że dla dowolnej permutacji σ zbioru $\{1, 2, \dots, q\}$

spełniona jest równość $N_{\sigma(1)}N_{\sigma(2)}\cdots N_{\sigma(q)} = 0_n$. Ponieważ macierze $\alpha_1 I_n, \alpha_2 I_n, \dots, \alpha_q I_n$ są przemiennie z każdym elementem algebry $\mathcal{A}$, to

$$\begin{aligned} \left[\dots [A_1, A_2], A_3, \dots, A_q \right] &= \left[\dots [\alpha_1 I_n + N_1, \alpha_2 I_n + N_2], \alpha_3 I_n + N_3, \dots, \alpha_q I_n + N_q \right] \\ &= \left[\dots [N_1, N_2], N_3, \dots, N_q \right]. \end{aligned}$$

Powyższy element jest kombinacją liniową iloczynów wszystkich z macierzy $N_1, N_2, \dots, N_q$ w pewnych kolejnościach. Zatem $\left[\dots [A_1, A_2], A_3, \dots, A_q \right] = 0_n$, co pokazuje, że $\mathcal{A}$ jest Ln_{q-1} algebrą.

Dla $q = 2$ rozpatrywana powyżej algebra jest równa algebrze przemiennej $\mathcal{A}_2$, którą rozważaliśmy w Przykładzie 2.2.1. Natomiast gdy $q = n$, to powyższa algebra jest równa algebrze $U_n^*(K)$.

Algebrę $\mathcal{A}$ z Przykładu 5.1.2 będziemy nazywali Ln_{q-1} *podalgebrą* $M_n(K)$ *związaną z kształtem* $(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Wymiar Ln_{q-1} podalgebry $M_n(K)$ związanej z kształtem $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ jest równy

$$1 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} n_i n_j = 1 + \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_q)^2 - \sum_{i=1}^q n_i^2}{2} = 1 + \frac{1}{2} \left(n^2 - \sum_{i=1}^q n_i^2 \right). \quad (5.1.2)$$

Z wyrażeniem występującym po prawej stronie ostatniej równości związana jest funkcja, której argumentami są dwie liczby naturalne

$$M(q, m) = \max_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(m^2 - \sum_{i=1}^q \ell_i^2 \right) \right\}, \quad (5.1.3)$$

gdzie maksimum jest rozpatrywane wśród liczb $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q \in \{0, 1, \dots, m\}$ spełniających równość $\sum_{i=1}^q \ell_i = m$. Tak określoną funkcję wykorzystywano w pracy [45], gdzie pokazano następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.1.3 (Theorem 24, [45]). *Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną Ln_{q-1} podalgebrą $M_n(K)$. Wtedy $\dim \mathcal{A} \leq M(q, n)$.*

Z Twierdzenia 5.1.3 oraz ze wzoru (5.1.2) wynika, że Ln_{q-1} podalgebra $M_n(K)$ związana z pewnym kształtem $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ jest Ln_{q-1} podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru równego $M(q, n)$. Wyznaczenie takiego ciągu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ sprowadza się do analizy funkcji $M(q, n)$. Przywołamy niektóre z wyników dotyczących tej funkcji.

Twierdzenie 5.1.4 (Theorem 31, [45]). *Niech q i n będą liczbami naturalnymi takimi, że $q \leq n$. Załóżmy, że r jest resztą z dzielenia n przez q . Wtedy*

$$M(q, n) = 1 + \frac{1}{2} \left(n^2 - (q - r) \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor^2 - r \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right)^2 \right).$$

Twierdzenie 5.1.5 (Theorem 32, [45]). *Niech n i q będą liczbami naturalnymi takimi, że $q \leq n$ oraz $q \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Wtedy $M(q, n) = 1 + \left\lfloor \frac{n^2(q-1)}{2q} \right\rfloor$.*

Twierdzenie 5.1.6 (Corollary 27, [45]). *Niech n i q będą liczbami naturalnymi takimi, że $q > n$. Wtedy $M(q, n) = 1 + \frac{n^2-n}{2}$.*

Z Twierdzeń 5.1.3–5.1.6 oraz ze wzoru (5.1.2) otrzymujemy wniosek analogiczny do Twierdzenia 3.5.3 mówiącego o kształtach D_q podalgebr $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru.

Wniosek 5.1.7. Niech q i n będą liczbami naturalnymi.

- a) Jeśli $q \leq n$ i r jest resztą z dzielenia liczby n przez q , to Ln_{q-1} podalgebra $M_n(K)$ związana z kształtem

$$\underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right)}_{q-r \text{ razy}} \underbrace{\hspace{10em}}_{r \text{ razy}}$$

jest Ln_{q-1} podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru.

- b) Jeśli $q > n$, to $U_n^*(K)$ jest Ln_{q-1} podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru.

Przykład 5.1.8. Niech $\mathcal{A}$ będzie Ln_2 podalgebrą $M_4(K)$ związaną z kształtem $(1, 1, 2)$ oraz niech $\mathcal{B}$ będzie Ln_3 podalgebrą $M_6(K)$ związaną z kształtem $(1, 1, 2, 2)$. Wtedy $\mathcal{A}$ jest Ln_2 podalgebrą $M_4(K)$ maksymalnego wymiaru, natomiast $\mathcal{B}$ jest Ln_3 podalgebrą $M_6(K)$ maksymalnego wymiaru. Zgodnie z definicją

$$\mathcal{A} = KI_4 + \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = KI_6 + \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & K & K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Przedstawione powyżej przykłady Ln_{q-1} podalgebr $M_n(K)$ maksymalnych wymiarów są podobne do D_q podalgebr $M_n(K)$ III typu. W kolejnych stwierdzeniach pokażemy pewne różnice między tymi klasami podalgebr.

Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną D_q podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ III typu. Wtedy idempotent $E = \sum_{i=1}^{n_1} e_{ii}$ oraz element e_{1n} należą do $\mathcal{A}$. Ponieważ liczby naturalne $n_1, n_2, \dots, n_q$ z rozpatrywanego ciągu spełniają równość $\sum_{i=1}^q n_i = n$ oraz zakładamy, że $q \geq 2$, to $n_1 < n$. Zatem spełnione są równości

$$E \cdot e_{1n} = e_{1n}, \quad e_{1n} \cdot E = 0_n.$$

Pokazaliśmy, że idempotent E nie jest centralny.

Stwierdzenie 5.1.9 (Proposition 6, [45]). *Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną Ln_q algebrą. Wtedy każdy idempotent algebry $\mathcal{A}$ jest centralny.*

Dowód. Niech e będzie dowolnym idempotentem algebry $\mathcal{A}$. Jak zauważyliśmy po Definicji 1.0.8, wtedy e i $(1 - e)$ są idempotentami ortogonalnymi. Zatem spełnione są równości

$$e^2 = e, \quad e(1 - e) = 0, \quad (1 - e)e = 0, \quad (1 - e)^2 = (1 - e). \quad (5.1.4)$$

Niech a będzie dowolnym elementem $\mathcal{A}$. Mamy pokazać, że $ae = ea$. W tym celu określmy pomocnicze elementy $b = (1 - e)ae$ oraz $c = ea(1 - e)$ należące do algebry $\mathcal{A}$.

Z pierwszych dwóch równości w formule (5.1.4) wynika, że $[b, e] = be - eb = b$. Stąd otrzymujemy równość $[b, e], e] = [b, e] = b$. Analogicznie pokazujemy, że

$$\left[\dots \underbrace{[b, e], e]_{q \text{ razy}} \dots, e \right] = b.$$

Ponieważ $\mathcal{A}$ jest Ln_q algebrą, to lewa strona powyższej równości jest zerowa, więc $b = 0$. Korzystając z trzeciej i czwartej równości w formule (5.1.4), podobnie sprawdzamy, że

$$\left[\dots \underbrace{[c, 1 - e], 1 - e]_{q \text{ razy}} \dots, 1 - e \right] = c = 0. \quad (5.1.5)$$

Z równości $b = 0$ i $c = 0$ wynika, że $ae = eae$ oraz $ea = eae$. Zatem udowodniliśmy równość $ae = ea$. To kończy dowód. $\square$

We Wniosku 3.2.6 pokazaliśmy, że D_q podalgebry $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru są sprzężone z D_q podalgebrami $M_n(K)$ III typu. Zobaczymy, że analogiczny opis Ln_q podalgebr $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru nie może być prawdziwy bez dodatkowego założenia o ciele K .

Stwierdzenie 5.1.10. *Niech K będzie ciałem charakterystyki 2 i niech*

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & e & f \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d, e, f \in K \right\}.$$

Wtedy $\mathcal{A}$ jest Ln_2 podalgebrą $M_4(K)$, która nie jest sprzężona z Ln_2 podalgebrą $M_4(K)$ związaną z żadnym kształtem (n_1, n_2, n_3) .

Dowód. Z określenia wynika, że zbiór $\mathcal{A}$ jest przestrzenią liniową zamkniętą na mnożenie. Zatem $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $M_4(K)$. Teraz pokażemy, że $\mathcal{A}$ jest Ln_2 algebrą. W tym celu rozpatrzmy dowolne macierze

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & y_1 & y_5 & y_6 \\ 0 & 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix},$$

które należą do $\mathcal{A}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & y_1 & y_5 & y_6 \\ 0 & 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & y_1 & y_5 & y_6 \\ 0 & 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 + x_2 y_1 & x_1 y_3 + x_2 y_5 + x_3 y_1 & t_1 \\ 0 & x_1 y_1 & x_1 y_5 + x_5 y_1 & x_1 y_6 + x_5 y_2 + x_6 y_1 \\ 0 & 0 & x_1 y_1 & x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 y_1 \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} y_1 x_1 & y_1 x_2 + y_2 x_1 & y_1 x_3 + y_2 x_5 + y_3 x_1 & t_2 \\ 0 & y_1 x_1 & y_1 x_5 + y_5 x_1 & y_1 x_6 + y_5 x_2 + y_6 x_1 \\ 0 & 0 & y_1 x_1 & y_1 x_2 + y_2 x_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_1 x_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_2 y_5 - y_2 x_5 & t_1 - t_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 y_2 - y_5 x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

gdzie $t_1 = x_1 y_4 + x_2 y_6 + x_3 y_2 + x_4 y_1$, $t_2 = y_1 x_4 + y_2 x_6 + y_3 x_2 + y_4 x_1$. Z dowolności macierzy X , Y oraz tego, że w ciele charakterystyki 2 liczby przeciwne są sobie równe wynika, że komutatory każdego dwóch elementów algebry $\mathcal{A}$ należą do zbioru

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : c, d \in K \right\}.$$

Sprawdźmy, że dowolny element zbioru $\mathcal{C}$ jest przemienny z każdym elementem algebry $\mathcal{A}$. Niech więc

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & v_1 & v_5 & v_6 \\ 0 & 0 & v_1 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_1 \end{pmatrix}$$

będą dowolnymi elementami odpowiednio $\mathcal{C}$ oraz $\mathcal{A}$. Wtedy

$$[U, V] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_1 v_1 & u_1 v_2 + u_2 v_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_1 u_1 & v_1 u_2 + v_2 u_1 \\ 0 & 0 & 0 & v_1 u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_4.$$

Z ostatniej równości oraz zawierania $\{[a_1, a_2] : a_1, a_2 \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{C}$ otrzymujemy, że $\mathcal{A}$ jest algebrą z tożsamością wielomianową $[[x, y], z] = 0$. Pokazaliśmy, że $\mathcal{A}$ jest Ln_2 algebrą. Wcześniej w Przykładzie 5.1.8 podaliśmy przykład Ln_2 podalgebry $M_4(K)$ maksymalnego wymiaru. Wymiar jej jest równy 6. Tego samego wymiaru jest algebra $\mathcal{A}$, więc $\mathcal{A}$ jest Ln_2 podalgebrą $M_4(K)$ maksymalnego wymiaru.

Pozostało sprawdzić, że nie istnieje ciąg liczb naturalnych (n_1, n_2, n_3) spełniający równość $n_1 + n_2 + n_3 = 4$, dla którego algebra $\mathcal{A}$ jest sprzężona z Ln_2 podalgebrą $M_4(K)$

związaną z kształtem (n_1, n_2, n_3) . W tym celu rozpatrzmy dowolny ciąg liczb naturalnych (n_1, n_2, n_3) spełniający równość $n_1 + n_2 + n_3 = 4$. Niech $\mathcal{B}$ będzie Ln_2 podalgebrą $M_4(K)$ związaną z kształtem (n_1, n_2, n_3) . Porównamy ideały $U(\mathcal{A})$ oraz $U(\mathcal{B})$ algebr $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$, których elementami są wszystkie macierze należące do tych algebr o zerowych wyrazach na głównych przekątnych. Tak określone ideały $U(\mathcal{A})$ i $U(\mathcal{B})$ są równe odpowiednio

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : b, c, d, e, f \in K \right\}, \quad \begin{pmatrix} 0_{n_1} & M_{n_1 \times n_2}(K) & M_{n_1 \times n_3}(K) \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} & M_{n_2 \times n_3}(K) \\ 0_{n_3 \times n_1} & 0_{n_3 \times n_2} & 0_{n_3} \end{pmatrix}.$$

Zatem $U(\mathcal{A})^3 \neq \{0_4\}$, natomiast $U(\mathcal{B})^3 = \{0_4\}$. Stąd wynika, że algebry $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ nie są izomorficzne, więc nie są sprzężone. To kończy dowód. $\square$

5.2 Algebry Ls_2 nie będące D_2 algebrami

W tym podrozdziale będziemy rozpatrywali algebrę macierzy górnotrójkątnych z równymi sobie wyrazami na głównej przekątnej o wyrazach w algebrze $\mathcal{A}$. Będziemy oznaczać ją przez $U_3^*(\mathcal{A})$. Algebrę $U_3^*(\mathcal{A})$ wykorzystamy do pokazania ciekawych zależności między algebrami z następującymi tożsamościami wielomianowymi:

$$[x_1, y_1][x_2, y_2] = 0, \quad [x_1, x_2], x_3 = 0, \quad [x_1, y_1], [x_2, y_2] = 0.$$

Uwaga 5.2.1. Jeśli x jest dowolnym elementem algebry $\mathcal{A}$, to macierz $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ należy do $U_3^*(\mathcal{A})$. Analogicznie jak w przypadku algebry macierzy nad ciałem będziemy ją oznaczać przez xI_3 . Komutator macierzy xI_3 z dowolną macierzą $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ algebry $U_3^*(K)$ jest równy

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x, a] & [x, b] & [x, c] \\ 0 & [x, a] & [x, d] \\ 0 & 0 & [x, a] \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że element xI_3 jest przemienny z każdym elementem $U_3^*(\mathcal{A})$ wtedy i tylko wtedy, gdy element x jest przemienny z każdym elementem $\mathcal{A}$.

Algebra z tożsamością wielomianową $[x_1, y_1][x_2, y_2] = 0$ jest przykładem algebry rozwiązalnej, którą definiujemy następująco.

Nich $\mathcal{A}$ będzie algebrą. Określmy indukcyjnie ciąg

$$\mathfrak{D}^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}, \quad \mathfrak{D}^{q+1}(\mathcal{A}) = [\mathfrak{D}^q(\mathcal{A}), \mathfrak{D}^q(\mathcal{A})], \quad (5.2.1)$$

gdzie q jest dowolną liczbą całkowitą nieujemną.

Definicja 5.2.2. Powiemy, że algebra $\mathcal{A}$ jest rozwiązalną indeksu q , jeśli przestrzeń liniowa $\mathcal{A}$ z nawiasem Liego będącym komutatorem elementów jest rozwiązalną algebrą Liego indeksu q , to znaczy $\mathfrak{D}^q(\mathcal{A}) = \{0\}$. Będziemy pisać w skrócie, że $\mathcal{A}$ jest Ls_q algebrą.

Twierdzenie 5.2.3 (Theorem 2.1, [32] i Proposition 7, [50]). *Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą. Wówczas $U_3^*(\mathcal{A})$ jest Ls_2 algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A}$ jest jednocześnie Ln_2 i D_2 algebrą.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $\mathcal{A}$ jest Ln_2 i D_2 algebrą. Pokażemy, że $U_3^*(\mathcal{A})$ jest Ls_2 algebrą. Weźmy dowolne macierze

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ 0 & e_1 & h_1 \\ 0 & 0 & e_1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} e_2 & f_2 & g_2 \\ 0 & e_2 & h_2 \\ 0 & 0 & e_2 \end{pmatrix},$$

które należą do $U_3^*(\mathcal{A})$. Wtedy

$$\begin{aligned} [X_1, Y_1] &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ 0 & e_1 & h_1 \\ 0 & 0 & e_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ 0 & e_1 & h_1 \\ 0 & 0 & e_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [a_1, e_1] & [a_1, f_1] + [b_1, e_1] & [a_1, g_1] + [c_1, e_1] + b_1 h_1 - f_1 d_1 \\ 0 & [a_1, e_1] & [a_1, h_1] + [d_1, e_1] \\ 0 & 0 & [a_1, e_1] \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

więc $[X_1, Y_1] = [a_1, e_1]I_3 + C_1 + Z_1$, gdzie

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & [a_1, f_1] + [b_1, e_1] & [a_1, g_1] + [c_1, e_1] \\ 0 & 0 & [a_1, h_1] + [d_1, e_1] \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 h_1 - f_1 d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podobnie $[X_2, Y_2] = [a_2, e_2]I_3 + C_2 + Z_2$, gdzie

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & [a_2, f_2] + [b_2, e_2] & [a_2, g_2] + [c_2, e_2] \\ 0 & 0 & [a_2, h_2] + [d_2, e_2] \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2 h_2 - f_2 d_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $\mathcal{A}$ jest Ln_2 algebrą, to dla dowolnych $r_1, r_2 \in \mathcal{A}$ komutatory $[a_1, e_1], r_1$, $[a_2, e_2], r_2$ są zerowe. Zatem z Uwagi 5.2.1 wynika, że macierze $[a_1, e_1]I_3$, $[a_2, e_2]I_3$ są przemienne z każdym elementem $U_3^*(\mathcal{A})$. Stąd otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} [[X_1, Y_1], [X_2, Y_2]] &= [[a_1, e_1]I_3 + C_1 + Z_1, [a_2, e_2]I_3 + C_2 + Z_2] = [C_1 + Z_1, C_2 + Z_2] \\ &= C_1 C_2 - C_2 C_1 + C_1 Z_2 - Z_2 C_1 + Z_1 C_2 - C_2 Z_1 + Z_1 Z_2 - Z_2 Z_1. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Wyrazy macierzy C_1 i C_2 są sumami komutatorów elementów algebry $\mathcal{A}$. Zatem z tego, że $\mathcal{A}$ jest D_2 algebrą, wynikają równości $C_1 C_2 = C_2 C_1 = 0_3$. Pozostałe wyrazy w formule (5.2.3) są również zerowe, co wynika z określenia macierzy C_1 , C_2 , Z_1 , Z_2 . To kończy dowód jednej z implikacji.

Teraz załóżmy, że $U_3^*(\mathcal{A})$ jest LS_2 algebrą. Pokażemy, że wtedy $\mathcal{A}$ jest D_2 oraz Ln_2 algebrą. Zaczniemy od udowodnienia, że $\mathcal{A}$ jest D_2 algebrą. Dla dowolnych $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{A}$ rozpatrzmy następujące macierze należące do $U_3^*(\mathcal{A})$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $U_3^*(\mathcal{A})$ jest LS_2 algebrą, to powyższe macierze spełniają równości

$$0_3 = [[X_1, Y_1], [X_2, Y_2]] = \left[\begin{pmatrix} 0 & [x_1, y_1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [x_2, y_2] \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & [x_1, y_1][x_2, y_2] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

więc $[x_1, y_1][x_2, y_2] = 0$. Powyższa równość, z dowolności elementów $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{A}$, pokazuje, że $\mathcal{A}$ jest D_2 algebrą.

Aby zakończyć dowód, sprawdzimy, że $\mathcal{A}$ jest Ln_2 algebrą. Niech z_1, z_2, z_3 będą dowolnymi elementami algebry $\mathcal{A}$. Rozważmy następujące macierze należące do $U_3^*(\mathcal{A})$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 \end{pmatrix}, Z_2 = \begin{pmatrix} z_2 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{pmatrix}, Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Z_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Korzystając z tego, że $U_3^*(\mathcal{A})$ jest LS_2 algebrą, otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} 0_3 = [[Z_1, Z_2], [Z_3, Z_4]] &= \left[\begin{pmatrix} [z_1, z_2] & 0 & 0 \\ 0 & [z_1, z_2] & 0 \\ 0 & 0 & [z_1, z_2] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & [[z_1, z_2], z_3] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $[[z_1, z_2], z_3] = 0$. To pokazuje, że $\mathcal{A}$ jest Ln_2 algebrą. Dowód został zakończony. $\square$

Następujące twierdzenie udowodnimy, inspirując się dowodem ostatniego twierdzenia.

Twierdzenie 5.2.4. *Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą. Wówczas $U_3^*(\mathcal{A})$ jest D_2 algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy algebra $\mathcal{A}$ jest przemienna.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $U_3^*(\mathcal{A})$ jest D_2 algebrą. Udowodnimy, że algebra $\mathcal{A}$ jest przemienna. Niech a, b będą dowolnymi elementami $\mathcal{A}$. Wtedy macierze $aI_3, bI_3, e_{12}, e_{23}$ należą do $U_3^*(\mathcal{A})$. Ponieważ $U_3^*(\mathcal{A})$ jest D_2 algebrą, to

$$0_3 = [aI_3, bI_3] \cdot [e_{12}, e_{23}] = [a, b]I_3 \cdot e_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & [a, b] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że $[a, b] = 0$. To pokazuje, że algebra $\mathcal{A}$ jest przemienna.

Założmy teraz, że algebra $\mathcal{A}$ jest przemienna. Udowodnimy, że $U_3^*(\mathcal{A})$ jest D_2 algebrą. W tym celu rozważmy dowolne macierze należące do $U_3^*(K)$

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ 0 & e_1 & h_1 \\ 0 & 0 & e_1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} e_2 & f_2 & g_2 \\ 0 & e_2 & h_2 \\ 0 & 0 & e_2 \end{pmatrix}.$$

Wtedy z formuły (5.2.2) wynika, że

$$[X_1, Y_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 h_1 - f_1 d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podobnie otrzymujemy równość

$$[X_2, Y_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2 h_2 - f_2 d_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zatem $[X_1, Y_1][X_2, Y_2] = 0_3$. To pokazuje, że $\mathcal{A}$ jest D_2 algebrą i kończy dowód. $\square$

Zauważmy, że dla dowolnego ciała K algebra $U_3^*(K)$ nie jest przemienna. Natomiast na mocy Twierdzenia 5.2.4 jest ona D_2 algebrą. Co więcej, $U_3^*(K)$ jest Ln_2 podalgebrą $M_3(K)$ związaną z kształtem $(1, 1, 1)$. Zatem z Twierdzenia 5.2.3 i Twierdzenia 5.2.4 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 5.2.5 (Corollary 2.2, [32], Example 3, [49]). Algebra $U_3^*(U_3^*(K))$ jest Ln_2 algebrą, ale nie jest D_2 algebrą.

Na zakończenie tego podrozdziału podamy przykład podalgebry $M_9(K)$ większego wymiaru od wymiaru algebry $U_3^*(U_3^*(K))$, która jest Ln_2 algebrą, ale nie jest D_2 algebrą. Aby to zrobić, znajdziemy algebrę, w której komutator dowolnych dwóch elementów jest równy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.4)$$

dla pewnych $\alpha, \beta_{ij} \in K$, gdzie $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Wówczas dla dowolnych elementów x_1, x_2, y_1, y_2 należących do takiej algebry, istnieją elementy $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ spełniające równość

$$[[x_1, y_1], [x_2, y_2]] = \alpha_1 \alpha_2 e_{19} - \alpha_2 \alpha_1 e_{19} = 0_9.$$

Stąd wynika, że jest ona Ln_2 algebrą.

Pokażemy, że algebra $\mathcal{A}$ określona wzorem

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & c & y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ 0 & \boxed{a & 0 & 0 & d} & y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ 0 & 0 & a & 0 & x_1 & y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a & x_2 & y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \\ 0 & \boxed{0 & 0 & 0 & a} & b & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d, x_1, x_2, z_1, z_2, y_{11}, \dots, y_{44} \in K \right\} \quad (5.2.5)$$

jest podalgebrą $M_9(K)$ o opisanej w poprzednim akapicie własności. Istotnie, zbiór $\mathcal{A}$ jest przestrzenią liniową zamkniętą na mnożenie. Wyróżnione przy definicji bloki są przemiennymi podalgebrami $M_4(K)$ równymi algebrze $\mathcal{A}_2$ z Przykładu 2.2.1 dla liczb $n_1 = 3, n_2 = 1$ występujących w jej definicji. Korzystając z tego wnioskujemy, że komutator dowolnych elementów $\mathcal{A}$ jest w postaci (5.2.4). Co więcej, macierze $e_{12} + e_{56}, e_{25} + e_{69}$ należą do $\mathcal{A}$. Spełniają one następującą zależność

$$[e_{12} + e_{56}, e_{25} + e_{69}][e_{12} + e_{56}, e_{25} + e_{69}] = (e_{15} + e_{59} - e_{26})(e_{15} + e_{59} - e_{26}) = e_{19} \neq 0_9.$$

Zatem $\mathcal{A}$ jest LS_2 algebrą, ale nie jest D_2 algebrą.

Wymiar algebry $\mathcal{A}$ jest równy 24, więc jest większy od $\dim U_3^*(U_3^*(K)) = 16$. Pomimo tego, że $\mathcal{A}$ jest LS_2 algebrą, ale nie D_2 algebrą, to jej wymiar nie przekracza maksymalnego wymiaru D_2 podalgebry $M_9(K)$ równego $2 + \left\lfloor \frac{3 \cdot 9^2}{8} \right\rfloor = 32$ (patrz Wniosek 3.5.4).

Opiszemy jak zmodyfikować przedstawioną powyżej konstrukcję, aby dla dowolnej liczby $n \geq 5$, uzyskać LS_2 podalgebrę $M_n(K)$, która nie jest D_2 algebrą.

Założmy najpierw, że n jest liczbą nieparzystą, równą $2\ell + 1$ dla pewnej liczby $\ell \geq 2$. Zastąpmy bloki wyróżnione we wzorze (5.2.5) blokami, które są równe algebrze $\mathcal{A}_2$ z Przykładu 2.2.1 dla liczb $n_1 = \ell - 1$ oraz $n_2 = 1$ występujących w jej określeniu. Dodatkowo założmy, że w otrzymanych po zamianie blokach wyrazy w 1-szym wierszu oraz ℓ -tej kolumnie są równe. Na koniec założmy, że wyrazy na głównej przekątnej otrzymanej algebry są równe oraz, że pozostałe wyrazy określone są w podobny sposób do tego co we wzorze (5.2.5). Na przykład dla $\ell = 2$ w wyniku powyższych operacji otrzymujemy następującą podalgebrę $M_5(K)$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & y_{11} & y_{12} \\ 0 & \boxed{a & d} & y_{21} & y_{22} \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22} \in K \right\}.$$

Rezultat opisanej procedury dla liczby $\ell \geq 3$ pokazany jest w Przykładzie 5.2.6.

Niech teraz n będzie liczbą parzystą, równą 2ℓ dla pewnej liczby naturalnej $\ell \geq 3$. Zastąpmy wtedy pierwszy z bloków wyszczególnionych we wzorze (5.2.5) blokiem równym

algebrze $\mathcal{A}_2$ z Przykładu 2.2.1 dla liczb $n_1 = \ell - 2$ oraz $n_2 = 1$ występujących w jej określeniu. Drugi z wyszczególnionych bloków zastąpmy algebrą $\mathcal{A}_2$ dla liczb $n_1 = \ell - 1$ oraz $n_2 = 1$. Dodatkowo założmy, że wyrazy w 1-szym wierszu oraz $(\ell - 1)$ -szej kolumnie pierwszego z bloków otrzymanych po zamianie są równe wyrazom znajdującym się w 1-szym wierszu oraz ℓ -tej kolumnie drugiego z bloków otrzymanych po zamianie. Następnie postąpmy tak samo jak w poprzednim przypadku. Na przykład dla $\ell = 3$ otrzymamy następującą podalgebrę $M_6(K)$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ 0 & a & d & y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ 0 & 0 & a & b & 0 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & a & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right) : a, b, c, d, z, y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23} \in K \right\}.$$

Wynik opisanej procedury dla liczby $\ell \geq 4$ podajemy w kolejnym przykładzie.

Przykład 5.2.6. Niech n będzie liczbą naturalną większą lub równą 7. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, równą $2\ell + 1$ dla pewnej liczby naturalnej $\ell \geq 3$, to określmy podalgebrę $\mathcal{A}$ algebry $M_n(K)$ formułą

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & c & y_{11} & y_{12} & y_{13} & \dots & y_{1,\ell-1} & y_{1,\ell} \\ \hline a & 0 & 0 & \dots & 0 & d & & y_{21} & y_{22} & y_{23} & \dots & y_{2,\ell-1} & y_{2,\ell} \\ & a & 0 & \dots & 0 & x_1 & & y_{31} & y_{32} & y_{33} & \dots & y_{3,\ell-1} & y_{3,\ell} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a & 0 & x_{\ell-3} & & y_{\ell-1,1} & y_{\ell-1,2} & y_{\ell-1,3} & \dots & y_{\ell-1,\ell-1} & y_{\ell-1,\ell} \\ & & & & a & x_{\ell-2} & & y_{\ell,1} & y_{\ell,2} & y_{\ell,3} & \dots & y_{\ell,\ell-1} & y_{\ell,\ell} \\ & & & & & a & & b & 0 & 0 & \dots & 0 & c \\ \hline & & & & & & a & 0 & 0 & \dots & 0 & d \\ & & & & & & & a & 0 & \dots & 0 & z_1 \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & & a & 0 & z_{\ell-3} \\ & & & & & & & & & & a & z_{\ell-2} \\ & & & & & & & & & & & a \end{array} \right) : a, b, c, d, x_1, x_2, \dots, x_{\ell-2}, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1,\ell}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{\ell,\ell}, z_1, z_2, \dots, z_{\ell-2} \in K \right\}.$$

Natomiast, gdy n jest liczbą nieparzystą, równą 2ℓ dla pewnej liczby naturalnej $\ell \geq 4$, to

określmy podalgebrę $\mathcal{A}$ algebry $M_n(K)$ wzorem

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & c & y_{11} & y_{12} & y_{13} & \dots & y_{1,\ell-1} & y_{1,\ell} \\ \boxed{\begin{matrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & d \\ & a & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a & 0 & x_{\ell-4} \\ & & & & a & x_{\ell-3} \\ & & & & & a \end{matrix}} & y_{21} & y_{22} & y_{23} & \dots & y_{2,\ell-1} & y_{2,\ell} \\ & y_{31} & y_{32} & y_{33} & \dots & y_{3,\ell-1} & y_{3,\ell} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & y_{\ell-2,1} & y_{\ell-2,2} & y_{\ell-2,3} & \dots & y_{\ell-2,\ell-1} & y_{\ell-2,\ell} \\ & y_{\ell-1,1} & y_{\ell-1,2} & y_{\ell-1,3} & \dots & y_{\ell-1,\ell-1} & y_{\ell-1,\ell} \\ & b & 0 & 0 & \dots & 0 & c \\ & a & 0 & 0 & \dots & 0 & d \\ & & a & 0 & \dots & 0 & z_1 \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & a & 0 & z_{\ell-3} \\ & & & & & a & z_{\ell-2} \\ & & & & & & a \end{pmatrix} : \right. \\ a, b, c, d, x_1, x_2, \dots, x_{\ell-3}, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1,\ell}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{\ell-1,\ell}, z_1, z_2, \dots, z_{\ell-2} \in K \}.$$

Wtedy $\mathcal{A}$ jest LS_2 algebrą, ale nie jest D_2 algebrą.

5.3 O algebrach $U_n^*(\mathcal{A})$, gdzie $\mathcal{A}$ jest algebrą z tożsamością wielomianową

W tym podrozdziale pokażemy, że jeśli $\mathcal{A}$ jest D_2 algebrą, to $U_n^*(\mathcal{A})$ jest $D_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}$ algebrą oraz udowodnimy, że jeśli $\mathcal{A}$ jest LS_2 algebrą, to $U_n^*(\mathcal{A})$ jest $LS_{\lceil \log_2 n \rceil + 1}$ algebrą.

Pierwszy z wyników uściśla rezultat z [50, Theorem 8] i ma inny dowód od tego zaprezentowanego we wspomnianej pracy. Natomiast drugi z wyników przedstawionych poniżej, pochodzi bezpośrednio z [50].

Dowód Twierdzenia 5.2.3 zaczęliśmy od wyznaczenia komutatora dowolnych macierzy $U_3^*(\mathcal{A})$, gdzie $\mathcal{A}$ jest dowolną algebrą (patrz formuła (5.2.2)). Na potrzeby dowodu następnego twierdzenia pokażemy, jakiej postaci są komutatory macierzy $U_n^*(\mathcal{A})$ dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$.

Uwaga 5.3.1. Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą i niech

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ 0 & x_{11} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \dots & y_{1n} \\ 0 & y_{11} & y_{23} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & y_{11} & y_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & y_{11} \end{pmatrix}.$$

będą dowolnymi macierzami należącymi do $U_n^*(\mathcal{A})$. Iloczyn XY i YX są równe odpowiednio

$$\begin{pmatrix}
x_{11}y_{11} & x_{11}y_{12}+x_{12}y_{11} & u_{13} & u_{14} & \dots & \dots & u_{1n} \\
0 & x_{11}y_{11} & x_{11}y_{23}+x_{23}y_{11} & u_{24} & \dots & \dots & u_{2n} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & x_{11}y_{11} & x_{11}y_{n-2,n-1}+x_{n-2,n-1}y_{11} & u_{n-2,n} \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & x_{11}y_{11} & x_{11}y_{n-1,n}+x_{n-1,n}y_{11} \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & x_{11}y_{11}
\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}
y_{11}x_{11} & y_{11}x_{12}+y_{12}x_{11} & v_{13} & v_{14} & \dots & \dots & v_{1n} \\
0 & y_{11}x_{11} & y_{11}x_{23}+y_{23}x_{11} & v_{24} & \dots & \dots & v_{2n} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & y_{11}x_{11} & y_{11}x_{n-2,n-1}+y_{n-2,n-1}x_{11} & v_{n-2,n} \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & y_{11}x_{11} & y_{11}x_{n-1,n}+y_{n-1,n}x_{11} \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & y_{11}x_{11}
\end{pmatrix}$$

dla pewnych $u_{13}, u_{14}, \dots, u_{1n}, u_{24}, u_{25}, \dots, u_{n-2,n}, v_{13}, v_{14}, \dots, v_{1n}, v_{24}, v_{25}, \dots, v_{n-2,n} \in \mathcal{A}$.
Zatem komutator $[X, Y]$ jest równy

$$\begin{pmatrix}
[x_{11}, y_{11}] & [x_{11}, y_{12}] + [x_{12}, y_{11}] & w_{13} & w_{14} & \dots & \dots & w_{1n} \\
0 & [x_{11}, y_{11}] & [x_{11}, y_{23}] + [x_{23}, y_{11}] & w_{24} & \dots & \dots & w_{2n} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & [x_{11}, y_{11}] & [x_{11}, y_{n-2,n-1}] + [x_{n-2,n-1}, y_{11}] & w_{n-2,n} \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & [x_{11}, y_{11}] & [x_{11}, y_{n-1,n}] + [x_{n-1,n}, y_{11}] \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & [x_{11}, y_{11}]
\end{pmatrix}$$

dla pewnych $w_{13}, w_{14}, \dots, w_{1n}, w_{24}, w_{25}, \dots, w_{n-2,n} \in \mathcal{A}$.

W pracy [50] autorzy definiując D_q algebry jako algebry spełniające tożsamość wielomianową

$$[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_q, y_q] = 0,$$

nie zakładali, że nie spełniają one tożsamości wielomianowej

$$[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_{q-1}, y_{q-1}] = 0.$$

Zatem, przy przyjętej przez nas Definicji 3.1.1, wynik udowodniony w [50, Theorem 8] jest następujący: Dla dowolnej D_q algebry $\mathcal{A}$ i dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ algebra $U_n^*(K)$ jest D_ℓ algebrą dla pewnej liczby $\ell \leq 2^{\lceil \log_2 n \rceil}$, gdzie $\lceil \log_2 n \rceil$ jest najmniejszą liczbą naturalną większą lub równą $\log_2 n$. W następnym twierdzeniu pokażemy, że $\ell = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.

Twierdzenie 5.3.2. Niech $\mathcal{A}$ będzie D_2 algebrą i niech n będzie dowolną liczbą naturalną większą lub równą 2. Wtedy $U_n^*(\mathcal{A})$ jest $D_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}$ algebrą.

Dowód. Z Uwagi 5.3.1 wynika, że każdy komutator algebry $U_n^*(\mathcal{A})$ należy do zbioru $\mathcal{D}$ równego

$$\left\{ \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & i_{22} & i_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & i_{n-2,n-2} & i_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & i_{n-1,n-1} & i_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & i_{n,n} \end{pmatrix} : a_{13}, \dots, a_{n-2,n} \in \mathcal{A}, i_{11}, \dots, i_{nn} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}} \right\},$$

gdzie przez $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ oznaczamy ideał generowany przez komutatory algebry $\mathcal{A}$. Ponieważ $\mathcal{A}$ jest D_2 algebrą, to z Lematu 3.2.1 wynika, że $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^2 = \{0\}$. Zatem jeśli

$$\begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots & x_{1n} \\ 0 & j_{22} & j_{23} & x_{24} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & j_{n-2,n-2} & j_{n-2,n-1} & x_{n-2,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & j_{n-1,n-1} & j_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & j_{n,n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & y_{13} & y_{14} & \dots & y_{1n} \\ 0 & k_{22} & k_{23} & y_{24} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & k_{n-2,n-2} & k_{n-2,n-1} & y_{n-2,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & k_{n-1,n-1} & k_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & k_{n,n} \end{pmatrix}$$

są dowolnymi macierzami ze zbioru $\mathcal{D}$, to ich iloczyn należy do zbioru

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & i_{13} & i_{14} & a_{25} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & i_{24} & i_{25} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & i_{n-3,n-1} & i_{n-3,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & i_{n-2,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a_{25}, \dots, a_{n-4,n} \in \mathcal{A}, i_{13}, \dots, i_{n-2,n} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}} \right\}.$$

Podobnie pokazujemy, że dla dowolnej liczby naturalnej t spełniającej nierówności $2 \leq t \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elementami zbioru $\mathcal{D}^t$ są macierze postaci

$$\begin{matrix} & \overbrace{\hspace{2cm}}^{2t-2 \text{ razy}} & \\ \left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & i_{1,2t-1} & i_{1,2t} & a_{1,2t+1} & a_{1,2t+2} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & i_{2,2t} & i_{2,2t+1} & a_{2,2t+2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & i_{n-2t,n-2} & i_{n-2t,n-1} & a_{n-2t,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & i_{n-2t+1,n-1} & i_{n-2t+1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & i_{n-2t+2,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

dla $i_{1,2t-1}, i_{1,2t}, i_{2,2t}, \dots, i_{n-2t+2,n} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ oraz $a_{1,2t+1}, a_{1,2t+2}, \dots, a_{1n}, a_{2,2t+2}, \dots, a_{n-2t,n} \in \mathcal{A}$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy n jest liczbą parzystą. Zapiszmy $n = 2k$ dla pewnej liczby naturalnej k . Z uzyskanego powyżej opisu wynika, że

$$\mathcal{D}^k = \{i_{1,n-1}e_{1,n-1} + i_{1,n}e_{1,n} + i_{2,n}e_{2,n} : i_{1,n-1}, i_{1,n}, i_{2,n} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}\}. \quad (5.3.1)$$

Zatem wyrazy dowolnej macierzy ze zbioru $\mathcal{D}^{k+1}$ należą do ideału $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^2$. Ponieważ $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^2 = \{0\}$, więc $\mathcal{D}^{k+1} = \mathcal{D}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1} = \{0_n\}$. Na początku dowodu wykazaliśmy, że każdy komutator algebry $\mathcal{A}$ należy do zbioru $\mathcal{D}$, więc w rozpatrywanym przypadku iloczyn dowolnych $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ komutatorów algebry $\mathcal{A}$ jest zerowy.

Podobnie sprawdzamy, że iloczyn dowolnych $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ komutatorów algebry $\mathcal{A}$ jest zerowy, gdy n jest liczbą nieparzystą.

Aby zakończyć dowód, pozostało udowodnić, że pewien iloczyn $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ komutatorów $U_n^*(\mathcal{A})$ jest niezerowy. Z dowodu Lematu 3.2.1 wynika, że jeśli iloczyn dowolnych $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ komutatorów algebry $U_n^*(K)$ jest zerowy, to $\mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = \{0_n\}$, gdzie $\mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{A}}}$ jest ideałem generowanym przez komutatory algebry $U_n^*(\mathcal{A})$. Wystarczy więc pokazać, że $\mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \neq \{0_n\}$. Zaczniemy od określenia następującego elementu algebry $U_n^*(K)$

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3.2)$$

Ponieważ $f = [e_{12}, e_{23}] + [e_{23}, e_{34}] + \dots + [e_{n-2,n-1}, e_{n-1,n}]$, to f należy do $\mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{A}}}$. Rozpatrzmy dodatkowo komutator $[xI_n, yI_n]$ należący do algebry $U_n^*(\mathcal{A})$, gdzie x, y są nieprzemiennymi ze sobą elementami algebry $\mathcal{A}$. Takie elementy x, y istnieją, ponieważ zakładamy, że D_2 algebry nie są przemienne. Wtedy, jeśli n jest liczbą parzystą równą $2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to

$$[xI_n, yI_n] \cdot f^{k-1} = [x, y]e_{1,n-1} + [x, y]e_{2,n} \neq 0_n, \quad \text{więc} \quad \mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{A}}}^k \neq \{0_n\}.$$

Podobnie, gdy n jest liczbą nieparzystą równą $2k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to

$$[xI_n, yI_n] \cdot f^k = [x, y]e_{1,n} \neq 0_n, \quad \text{więc} \quad \mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{A}}}^{k+1} \neq \{0_n\}.$$

Pokazaliśmy, że $\mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \neq \{0_n\}$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 5.3.3 (Theorem 8, [50]). *Niech $\mathcal{A}$ będzie Ls_2 algebrą oraz niech n będzie liczbą naturalną większą lub równą 2. Wtedy $U_n^*(\mathcal{A})$ jest $Ls_{\lceil \log_2 n \rceil + 1}$ algebrą.*

Dowód. Zaczniemy od pokazania, że twierdzenie jest prawdziwe, gdy liczba n jest potęgą liczby 2. Udowodnimy to indukcyjnie. Najpierw sprawdzimy, że $U_2^*(\mathcal{A})$ jest Ls_2 algebrą.

Niech

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ 0 & y_{11} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{11} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ 0 & v_{11} \end{pmatrix},$$

gdzie $x_{11}, x_{12}, y_{11}, y_{12}, u_{11}, u_{12}, v_{11}, v_{12} \in \mathcal{A}$, będą dowolnymi macierzami należącymi do $U_2^*(\mathcal{A})$. Wtedy z Uwagi 5.3.1

$$[X, Y] = \begin{pmatrix} [x_{11}, y_{11}] & [x_{11}, y_{12}] + [x_{12}, y_{11}] \\ 0 & [x_{11}, y_{11}] \end{pmatrix}, \quad [U, V] = \begin{pmatrix} [u_{11}, v_{11}] & [u_{11}, v_{12}] + [u_{12}, v_{11}] \\ 0 & [u_{11}, v_{11}] \end{pmatrix}.$$

Kolejny raz stosując tę uwagę otrzymujemy, że komutator $[[X, Y], [U, V]]$ jest równy

$$\begin{pmatrix} [[x_{11}, y_{11}], [u_{11}, v_{11}]] & [[x_{11}, y_{11}], [u_{11}, v_{12}] + [u_{12}, v_{11}]] + [[x_{11}, y_{12}] + [x_{12}, y_{11}], [u_{11}, v_{11}]] \\ 0 & [[x_{11}, y_{11}], [u_{11}, v_{11}]] \end{pmatrix}.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} [[x_{11}, y_{12}], [u_{11}, v_{12}] + [u_{12}, v_{11}]] &= [[x_{11}, y_{12}], [u_{11}, v_{12}]] + [[x_{11}, y_{12}], [u_{12}, v_{11}]], \\ [[x_{11}, y_{12}] + [x_{12}, y_{11}], [u_{11}, v_{11}]] &= [[x_{11}, y_{12}], [u_{11}, v_{11}]] + [[x_{12}, y_{11}], [u_{11}, v_{11}]] \end{aligned}$$

oraz $\mathcal{A}$ jest LS_2 algebrą, to wszystkie wyrazy macierzy $[[X, Y], [U, V]]$ są zerowe. Stąd wynika, że $U_2^*(\mathcal{A})$ jest LS_2 algebrą.

Założmy indukcyjnie, że $U_{2^q}^*(\mathcal{A})$ jest $LS_{\lceil \log_2 2^q \rceil + 1} = LS_{q+1}$ algebrą dla dowolnej liczby naturalnej. Pokażemy, że $U_{2^{q+1}}^*(\mathcal{A})$ jest LS_{q+2} algebrą. Elementy algebry $U_{2^{q+1}}^*(\mathcal{A})$ są postaci

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{ccccc|ccccc} a & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,2^q} & b_{1,2^q+1} & b_{1,2^q+2} & b_{1,2^q+3} & \dots & b_{1,2^q+1} \\ 0 & a & b_{23} & \dots & b_{2,2^q} & b_{2,2^q+1} & b_{2,2^q+2} & b_{2,2^q+3} & \dots & b_{2,2^q+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a & b_{2^q-1,2^q} & b_{2^q-1,2^q+1} & b_{2^q-1,2^q+2} & b_{2^q-1,2^q+3} & \dots & b_{2^q-1,2^q+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a & b_{2^q,2^q+1} & b_{2^q,2^q+2} & b_{2^q,2^q+3} & \dots & b_{2^q,2^q+1} \end{array} & \begin{array}{ccccc|ccccc} a & b_{2^q+1,2^q+2} & b_{2^q+1,2^q+3} & \dots & b_{2^q+1,2^q+1} \\ 0 & a & b_{2^q+2,2^q+3} & \dots & b_{2^q+2,2^q+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a & b_{2^q+1-1,2^q+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{array} \end{pmatrix}$$

dla pewnych $a, b_{12}, b_{13}, \dots, b_{1,2^q+1}, b_{23}, b_{24}, \dots, b_{2^q+1-1,2^q+1} \in \mathcal{A}$, więc

$$U_{2^{q+1}}^*(\mathcal{A}) \subseteq \begin{pmatrix} U_{2^q}^*(\mathcal{A}) & M_{2^q}(\mathcal{A}) \\ 0_{2^q} & U_{2^q}^*(\mathcal{A}) \end{pmatrix}. \quad (5.3.3)$$

Z założenia indukcyjnego $U_{2^q}^*(\mathcal{A})$ jest LS_{q+1} algebrą. Zatem korzystając dodatkowo z postaci blokowej macierzy należących do $\begin{pmatrix} U_{2^q}^*(\mathcal{A}) & M_{2^q}(\mathcal{A}) \\ 0_{2^q} & U_{2^q}^*(\mathcal{A}) \end{pmatrix}$, otrzymujemy, że

$$\mathfrak{D}^{q+1} \left(\begin{pmatrix} U_{2^q}^*(\mathcal{A}) & M_{2^q}(\mathcal{A}) \\ 0_{2^q} & U_{2^q}^*(\mathcal{A}) \end{pmatrix} \right) \subseteq \begin{pmatrix} \mathfrak{D}^{q+1}(U_{2^q}^*(\mathcal{A})) & M_{2^q}(\mathcal{A}) \\ 0_{2^q} & \mathfrak{D}^{q+1}(U_{2^q}^*(\mathcal{A})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2^q} & M_{2^q}(\mathcal{A}) \\ 0_{2^q} & 0_{2^q} \end{pmatrix}, \quad (5.3.4)$$

gdzie $\mathfrak{D}^\ell(\mathcal{B})$ dla dowolnej liczby naturalnej ℓ oraz dowolnej algebry $\mathcal{B}$ jest określone zgodnie z formułą (5.2.1). Z zawierań (5.3.3) i (5.3.4) wynika, że

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^{q+2}(\mathcal{U}_{2^{q+1}}^*(\mathcal{A})) &= [\mathfrak{D}^{q+1}(\mathcal{U}_{2^{q+1}}^*(\mathcal{A})), \mathfrak{D}^{q+1}(\mathcal{U}_{2^{q+1}}^*(\mathcal{A}))] \\ &\subseteq \left[\begin{pmatrix} 0_{2^q} & M_{2^q}(\mathcal{A}) \\ 0_{2^q} & 0_{2^q} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_{2^q} & M_{2^q}(\mathcal{A}) \\ 0_{2^q} & 0_{2^q} \end{pmatrix} \right] = \{0_{2^{q+1}}\}.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że $\mathcal{U}_{2^{q+1}}^*(\mathcal{A})$ jest Ls_{q+2} algebrą. Zatem na mocy zasady indukcji $\mathcal{U}_{2^q}^*(\mathcal{A})$ jest Ls_{q+1} algebrą dla dowolnej liczby naturalnej q .

Aby zakończyć dowód pokażemy, że twierdzenie jest prawdziwe dla liczby n , która nie jest potęgą liczby 2. Określmy

$$q = \max\{i \in \mathbb{N} : 2^i < n\}.$$

Wtedy $n < 2^{q+1}$, więc każdą macierz należącą do $\mathcal{U}_{2^{q+1}}^*(\mathcal{A})$ można zapisać w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0_{(2^{q+1}-n) \times n} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.3.5)$$

gdzie $A_{11} \in \mathcal{U}_n^*(\mathcal{A})$, $A_{12} \in M_{n \times (2^{q+1}-n)}(\mathcal{A})$ i $A_{22} \in \mathcal{U}_{2^{q+1}-n}^*(\mathcal{A})$. Dla dowolnej macierzy

$$X = \begin{pmatrix} a & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & a & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a & b_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

należącej do $\mathcal{U}_n^*(\mathcal{A})$, gdzie $a, b_{12}, b_{13}, \dots, b_{1n}, b_{23}, \dots, b_{n-1,n} \in \mathcal{A}$, macierz

$$\begin{pmatrix} X & 0_{n \times (2^{q+1}-n)} \\ 0_{(2^{q+1}-n) \times n} & aI_{(2^{q+1}-n)} \end{pmatrix}$$

należy do $\mathcal{U}_{2^{q+1}}^*(\mathcal{A})$. Stąd wynika, że algebra $\mathcal{U}_n^*(\mathcal{A})$ spełnia każdą tożsamość wielomianową algebry $\mathcal{U}_{2^{q+1}}^*(\mathcal{A})$. Zatem z udowodnionej części twierdzenia otrzymujemy, że $\mathcal{U}_n^*(\mathcal{A})$ jest Ls_{q+2} algebrą. Z nierówności $2^q < n < 2^{q+1}$ dostajemy nierówność $q < \log_2 n < q+1$. Zatem indeks rozwiązalności algebry $\mathcal{U}_n^*(\mathcal{A})$, którego wartość to $q+2$, jest równy $\lceil \log_2 n \rceil + 1$. To kończy dowód. $\square$

5.4 LD_q podalgebry $M_n(K)$

Ten podrozdział dotyczy podalgebr $M_n(K)$ z tożsamością wielomianową

$$[x_1, y_1], z_1][x_2, y_2], z_2] \dots [x_q, y_q], z_q] = 0, \quad (5.4.1)$$

gdzie q jest dowolną liczbą naturalną, większą lub równą 2. Zaczniemy od pokazania, że każda Ls_2 algebra jest algebrą z tożsamością wielomianową (5.4.1) dla $q = 2$. W tym celu wykorzystamy dowód twierdzenia Jenningsa z [47, Theorem 2.2].

Twierdzenie 5.4.1. Niech $\mathcal{A}$ będzie LS_2 algebrą. Wtedy $\mathcal{A}$ jest algebrą z tożsamością wielomianową

$$[[x_1, y_1], z_1][[x_2, y_2], z_2] = 0.$$

Dowód. Niech algebra $\mathcal{A}$ będzie jak powyżej. Każde trzy elementy x, y, z dowolnej algebry spełniają równość

$$[x, yz] = [x, y]z + y[x, z].$$

Zatem dla dowolnych $x_1, y_1, z_1, z_2, r \in \mathcal{A}$ mamy

$$\begin{aligned} [[x_1, y_1], [z_2, z_1r]] &= [[x_1, y_1], [z_2, z_1]r + z_1[z_2, r]] = [[x_1, y_1], [z_2, z_1]r] + [[x_1, y_1], z_1[z_2, r]] \\ &= [[x_1, y_1], [z_2, z_1]]r + [z_2, z_1][[x_1, y_1], r] \\ &\quad + [[x_1, y_1], z_1][z_2, r] + z_1[[x_1, y_1], [z_2, r]]. \end{aligned}$$

Ponieważ $\mathcal{A}$ jest LS_2 algebrą, to

$$[[x_1, y_1], [z_2, z_1r]] = [[x_1, y_1], [z_2, z_1]]r = z_1[[x_1, y_1], [z_2, r]] = 0.$$

Stąd oraz z poprzedniej równości wynika, że

$$[z_2, z_1][[x_1, y_1], r] + [[x_1, y_1], z_1][z_2, r] = 0. \quad (5.4.2)$$

Niech x_2, y_2 będą dowolnymi elementami algebry $\mathcal{A}$. Podstawiając w równości (5.4.2) komutator $[x_2, y_2]$ za r oraz korzystając z tego, że $\mathcal{A}$ jest LS_2 algebrą, otrzymujemy równość $[[x_1, y_1], z_1][z_2, [x_2, y_2]] = 0$. Wynika z niej, że $[[x_1, y_1], z_1][[x_2, y_2], z_2] = 0$, co z dowolności elementów $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ kończy dowód. $\square$

Definicja 5.4.2. Niech q będzie liczbą naturalną większą lub równą 2. Algebrę z tożsamością wielomianową $[[x_1, y_1], z_1][[x_2, y_2], z_2] \dots [[x_q, y_q], z_q] = 0$, która nie jest algebrą z tożsamością wielomianową $[[x_1, y_1], z_1][[x_2, y_2], z_2] \dots [[x_{q-1}, y_{q-1}], z_{q-1}] = 0$, nazywamy LD_q algebrą.

Powyższa tożsamość wielomianowa, którą spełniają LD_q algebry, jest uogólnieniem tożsamości spełnionej przez Ln_2 algebry.

W Twierdzeniu 5.4.1 pokazaliśmy, że każda LS_2 algebra jest LD_2 algebrą. Korzystając z tego twierdzenia, we Wniosku 5.4.8 uzyskamy oszacowanie maksymalnego wymiaru LS_2 podalgebry $M_n(K)$. Tożsamość wielomianowa definiująca LS_q algebry jest kombinacją liniową iloczynów 2^{q-1} komutatorów. Zatem ze względu na Twierdzenie 5.4.1, zasadnym jest następujące pytanie: Czy dla dowolnej liczby naturalnej $q > 2$, każda LS_q algebra jest $LD_{2^{q-1}}$ algebrą? W następnym przykładzie pokażemy, że nie jest to prawdą już dla $q = 3$.

Przykład 5.4.3. Niech $\mathcal{A}$ będzie następującym podzbiorem algebry $U_5(K)$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & f & g & h & i \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d, e, f, g, h, i \in K \right\}.$$

Wtedy $\mathcal{A}$ jest Ls_3 algebrą, ale nie jest LD_4 algebrą.

Zbiór $\mathcal{A}$ jest przestrzenią liniową zamkniętą na mnożenie, więc jest podalgebrą $U_5(K)$. Pokażemy teraz, że $\mathcal{A}$ jest Ls_3 algebrą. Niech X_1, X_2, Y_1, Y_2 będą dowolnymi macierzami należącymi do algebry $\mathcal{A}$. Wtedy komutatory $[X_1, Y_1], [X_2, Y_2]$ należą do zbioru

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c & d & e \\ 0 & 0 & g & h & i \\ 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : b, c, d, e, g, h, i \in K \right\},$$

więc element $[X_1, Y_1], [X_2, Y_2]$ należy do zbioru

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & d & e \\ 0 & 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : c, d, e, h, i \in K \right\}. \quad (5.4.3)$$

Stąd oraz z dowolności macierzy $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{A}$ wynika, że zbiór $\mathfrak{D}^2(\mathcal{A})$ zawiera się w zbiorze (5.4.3), gdzie $\mathfrak{D}^i(\mathcal{A})$ dla dowolnej liczby naturalnej i jest określone wzorem (5.2.1). Ponieważ iloczyn dowolnych macierzy ze zbioru (5.4.3) jest przemienny, to

$$\mathfrak{D}^3(\mathcal{A}) = [\mathfrak{D}^2(\mathcal{A}), \mathfrak{D}^2(\mathcal{A})] = \{0_5\}.$$

Pokazaliśmy, że $\mathcal{A}$ jest Ls_3 algebrą.

Pozostało nam sprawdzić, że $\mathcal{A}$ nie jest LD_4 algebrą. W tym celu rozpatrzmy następujące macierze należące do algebry $\mathcal{A}$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tak określone macierze spełniają równości $[X_1, Y_1] = Y_1$ oraz $[X_2, Y_2] = Y_2$, więc

$$[[X_1, Y_1], -X_1] = [Y_1, -X_1] = Y_1, \quad [[X_2, Y_2], -X_2] = [Y_2, -X_2] = Y_2.$$

Stąd

$$([X_1, Y_1], -X_1] + [X_2, Y_2], -X_2])^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_4.$$

Z drugiej strony, po wymnożeniu $\left([X_1, Y_1], -X_1\right) + \left([X_2, Y_2], -X_2\right)^4$ jest sumą elementów postaci

$$[u_1, v_1], w_1][u_2, v_2], w_2][u_3, v_3], w_3][u_4, v_4], w_4], \quad (5.4.4)$$

gdzie $u_i, v_i, w_i \in \mathcal{A}$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. W każdej LD_4 algebrze elementy postaci (5.4.4) są zerowe, więc wnioskujemy, że $\mathcal{A}$ nie jest LD_4 algebrą.

Dowód następnego wyniku jest bardzo podobny do dowodu Lematu 3.2.1.

Lemat 5.4.4. *Niech $\mathcal{A}$ będzie LD_q algebrą oraz niech $I_{\mathcal{A}}$ będzie jej ideałem generowanym przez zbiór $\{[x, y], z\} : x, y, z \in \mathcal{A}\}$. Wtedy $I_{\mathcal{A}}^q = \{0\}$ oraz q jest indeksem nilpotentności ideału $I_{\mathcal{A}}$.*

Dowód. Podobnie jak w dowodzie Lematu 3.2.1 wystarczy sprawdzić, że dla dowolnych $r_i, u_j, v_j, y_j \in \mathcal{A}$, gdzie $i \in \{1, 2, \dots, q+1\}, j \in \{1, 2, \dots, q\}$ element

$$r_1[u_1, v_1], y_1]r_2[u_2, v_2], y_2]r_3 \dots [u_q, v_q], y_q]r_{q+1} \quad (5.4.5)$$

jest zerowy. Jeśli określimy $x_1 = [u_1, v_1], x_2 = [u_2, v_2], \dots, x_q = [u_q, v_q]$, to wykorzystując dowód wspomnianego Lematu 3.2.1, otrzymujemy, że element (5.4.5) jest sumą elementów postaci

$$\pm[u'_1, v'_1], y'_1][u'_2, v'_2], y'_2] \dots [u'_q, v'_q], y'_q]r' \quad (5.4.6)$$

dla pewnych $u'_1, v'_1, y'_1, \dots, u'_q, v'_q, y'_q, r' \in \mathcal{A}$. Ponieważ $\mathcal{A}$ jest LD_q algebrą, to każdy element postaci (5.4.6) jest zerowy. Zatem $I_{\mathcal{A}}^q = \{0\}$. Z określenia, $\mathcal{A}$ nie jest LD_{q-1} algebrą, więc $I_{\mathcal{A}}^{q-1} \neq \{0\}$. To pokazuje, że q jest indeksem nilpotentności ideału $I_{\mathcal{A}}$, co kończy dowód. $\square$

Tak jak w przypadku D_q podalgebr $M_n(K)$ (patrz Twierdzenie 3.2.5 oraz Twierdzenie 3.2.7) możemy pokazać, że algebra $\mathcal{A}$ jest maksymalną LD_q podalgebrą $M_n(K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A}$ jest sprzężona z podalgebrą $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$, która jest w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{qq} \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{A}_{ii}$ jest maksymalną Ln_2 podalgebrą $M_{n_i}(K)$ dla $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, natomiast $\mathcal{A}_{ij} = M_{n_i \times n_j}(K)$ dla liczb naturalnych i, j takich, że $1 \leq i < j \leq q$. Analogicznie do Wniosku 3.2.6 dotyczącego D_q podalgebr maksymalnego wymiaru możemy także scharakteryzować LD_q podalgebry $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru. Nie będziemy tego robić, ponieważ do dalszych rozważań wystarczy nam mniej dokładny opis.

Stwierdzenie 5.4.5. *Niech $\mathcal{A}$ będzie LD_q podalgebrą $M_n(K)$. Wówczas istnieje macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ oraz liczby naturalne $n_1, n_2, \dots, n_q$ spełniające równość $\sum_{i=1}^q n_i = n$ takie, że $X^{-1}\mathcal{A}X$ zawiera się w podalgebrze $\mathcal{A}'$ algebry $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ w postaci blokowej*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{11} & \dots & \mathcal{A}'_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}'_{qq} \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{A}'_{ii}$ jest Ln_2 podalgebrą $M_{n_i}(K)$ dla $i = 1, 2, \dots, q$, natomiast $\mathcal{A}'_{ij} = M_{n_i \times n_j}(K)$ dla $1 \leq i < j \leq q$.

Dowód. Niech $I_{\mathcal{A}}$ będzie ideałem algebry $\mathcal{A}$ generowany przez zbiór $\{[[x, y], z] : x, y, z \in \mathcal{A}\}$. Na mocy Lematu 5.4.4 tak określony ideał jest ideałem nilpotentnym, którego indeks nilpotentności jest równy q . Zatem ze Stwierdzenia 1.0.20 istnieje macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ taka, że algebra $X^{-1}\mathcal{A}X$ zawiera się w pełnej podalgebrze $M_n(K)$ pewnego kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$. Co więcej, ideał $X^{-1}I_{\mathcal{A}}X$ zawiera się w zbiorze

$$\begin{pmatrix} 0_{n_1} & M_{n_1 \times n_2}(K) & M_{n_1 \times n_3}(K) & \cdots & M_{n_1 \times n_q}(K) \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2} & M_{n_2 \times n_3}(K) & \cdots & M_{n_2 \times n_q}(K) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & M_{n_{q-1} \times n_q}(K) \\ 0_{n_q \times n_1} & \cdots & \cdots & 0_{n_q \times n_{q-1}} & 0_{n_q} \end{pmatrix}. \quad (5.4.7)$$

Ponieważ dla dowolnych macierzy $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$ spełniona jest równość

$$X^{-1}[[A_1, A_2], A_3]X = [X^{-1}[A_1, A_2]X, X^{-1}A_3X] = [[X^{-1}A_1X, X^{-1}A_2X], X^{-1}A_3X],$$

to ideał algebry $X^{-1}\mathcal{A}X$ generowany przez zbiór $\{[[x', y'], z'] : x', y', z' \in X^{-1}\mathcal{A}X\}$ jest równy $X^{-1}I_{\mathcal{A}}X$. Zatem dla dowolnych $A'_1, A'_2, A'_3 \in X^{-1}\mathcal{A}X$ element $[[A'_1, A'_2], A'_3]$ należy do zbioru (5.4.7). Stąd wynika, że dla dowolnej liczby $i \in \{1, 2, \dots, q\}$

$$\overline{\mathcal{A}}'_{ii} = \left\{ X_{ii} \in M_{n_i}(K) : \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1i} & \cdots & X_{1q} \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & X_{ii} & \cdots & X_{iq} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & X_{qq} \end{pmatrix} \in X^{-1}\mathcal{A}X \right\}$$

jest Ln_2 podalgebrą $M_{n_i}(K)$. Zatem za szukaną w stwierdzeniu macierz odwracalną możemy przyjąć macierz X , a za szukaną podalgebrę $\mathcal{A}'$ możemy przyjąć algebrę

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{A}}'_{11} & M_{n_1 \times n_2}(K) & M_{n_1 \times n_3}(K) & \cdots & M_{n_1 \times n_q}(K) \\ 0_{n_2 \times n_1} & \overline{\mathcal{A}}'_{22} & M_{n_2 \times n_3}(K) & \cdots & M_{n_2 \times n_q}(K) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & M_{n_{q-1} \times n_q}(K) \\ 0_{n_q \times n_1} & \cdots & \cdots & 0_{n_q \times n_{q-1}} & \overline{\mathcal{A}}'_{qq} \end{pmatrix}.$$

To kończy dowód. □

Twierdzenie 5.4.6. Niech $\mathcal{A}$ będzie LD_q podalgebrą $M_n(K)$. Wtedy

$$\dim \mathcal{A} \leq \max_{n_1, n_2, \dots, n_q} \left\{ q + \frac{n^2}{2} - \sum_{i=1}^q \left(\frac{n_i^2}{2} - \left\lfloor \frac{n_i^2}{3} \right\rfloor \right) \right\},$$

gdzie maksimum rozpatrujemy wśród wszystkich liczb $n_1, n_2, \dots, n_q \in \{0, 1, \dots, n\}$ takich, że $\sum_{i=1}^q n_i = n$.

Dowód. Ze Stwierdzenia 5.4.5 istnieje macierz odwracalna $X \in M_n(K)$ taka, że algebra $X^{-1}\mathcal{A}X$ zawiera się w pewnej podalgebrze $M_n(K)$ kształtu $(n'_1, n'_2, \dots, n'_q)$ w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_{11} & \cdots & \mathcal{A}'_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}'_{qq} \end{pmatrix}, \quad (5.4.8)$$

gdzie $\mathcal{A}'_{ii}$ jest Ln_2 podalgebrą $M_{n'_i}(K)$ dla $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, natomiast $\mathcal{A}'_{ij} = M_{n'_i \times n'_j}(K)$ dla $1 \leq i < j \leq q$. Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{A} &= \dim X^{-1}\mathcal{A}X \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq q} \dim \mathcal{A}'_{ij} = \sum_{i=1}^q \dim \mathcal{A}'_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq q} \dim \mathcal{A}'_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^q \dim \mathcal{A}'_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq q} n'_i n'_j = \sum_{i=1}^q \dim \mathcal{A}'_{ii} + \frac{(n'_1 + n'_2 + \dots + n'_q)^2 - \sum_{i=1}^q (n'_i)^2}{2}. \end{aligned}$$

Ponieważ liczby $n'_1, n'_2, \dots, n'_q$ definiujące kształt spełniają równość $\sum_{i=1}^q n'_i = n$, to

$$\dim \mathcal{A} = \sum_{i=1}^q \dim \mathcal{A}'_{ii} + \frac{(n'_1 + n'_2 + \dots + n'_q)^2 - \sum_{i=1}^q (n'_i)^2}{2} = \sum_{i=1}^q \dim \mathcal{A}'_{ii} + \frac{n^2}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{(n'_i)^2}{2}. \quad (5.4.9)$$

Co więcej, dla dowolnej liczby $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ wymiar Ln_2 podalgebry $M_{n'_i}(K)$ jest nie większy od $1 + \left\lfloor \frac{(n'_i)^2}{3} \right\rfloor$. Istotnie, w przypadku gdy $n'_i \geq 3$ wynika to z Twierdzenia 5.1.3 oraz Twierdzenia 5.1.5, natomiast dla $n'_i \in \{1, 2\}$ otrzymujemy wspomnianą zależność z Twierdzenia 5.1.3 oraz Twierdzenia 5.1.6. Stąd oraz z równości (5.4.9) dostajemy, że

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{A} &= \sum_{i=1}^q \dim \mathcal{A}'_{ii} + \frac{n^2}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{(n'_i)^2}{2} \leq \sum_{i=1}^q \left(1 + \left\lfloor \frac{(n'_i)^2}{3} \right\rfloor \right) + \frac{n^2}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{(n'_i)^2}{2} \\ &= q + \frac{n^2}{2} - \sum_{i=1}^q \left(\frac{(n'_i)^2}{2} - \left\lfloor \frac{(n'_i)^2}{3} \right\rfloor \right). \end{aligned}$$

Powyższa nierówność kończy dowód, ponieważ $n'_1, n'_2, \dots, n'_q$ są liczbami naturalnymi, dla których $\sum_{i=1}^q n'_i = n$. $\square$

Teraz udowodnimy równoważną formułę na ograniczenie górne z poprzedniego twierdzenia. Wykorzystamy do tego funkcję $M(q, n)$, gdzie q i n są liczbami naturalnymi, określoną wzorem (5.1.3).

Stwierdzenie 5.4.7. Niech n i q będą liczbami naturalnymi takimi, że $q \leq n$. Wtedy

$$\max_{n_1, n_2, \dots, n_q} \left\{ q + \frac{n^2}{2} - \sum_{i=1}^q \left(\frac{n_i^2}{2} - \left\lfloor \frac{n_i^2}{3} \right\rfloor \right) \right\} = q - 1 + M(3q, n),$$

gdzie maksimum rozpatrujemy wśród wszystkich liczb $n_1, n_2, \dots, n_q \in \{0, 1, \dots, n\}$ takich, że $\sum_{i=1}^q n_i = n$.

Dowód. Zaczniemy od pokazania, że

$$q - 1 + M(3q, n) \leq \max_{n_1, n_2, \dots, n_q} \left\{ q + \frac{n^2}{2} - \sum_{i=1}^q \left(\frac{n_i^2}{2} - \left\lfloor \frac{n_i^2}{3} \right\rfloor \right) \right\}. \quad (5.4.10)$$

W tym celu rozpatrzmy ciąg $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{3q})$, gdzie $\ell_i \in \{0, 1, \dots, n\}$ dla $i = 1, 2, \dots, 3q$ taki, że

$$\sum_{i=1}^{3q} \ell_i = n \quad \text{oraz} \quad M(3q, n) = 1 + \frac{1}{2} \left(n^2 - \sum_{i=1}^{3q} \ell_i^2 \right).$$

Pogrupujemy liczby $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{3q}$ w taki sposób, aby uzyskać q liczb sumujących się do n . Następnie skorzystamy z definicji funkcji M oraz z uproszczonej formuły na tę funkcję. Dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ określmy liczbę

$$n'_i = \ell_{3i-2} + \ell_{3i-1} + \ell_{3i}.$$

Wartość $M(3, n'_i)$ jest równa $1 + \left\lfloor \frac{(n'_i)^2}{3} \right\rfloor$. Istotnie, jeśli $n'_i \geq 3$ wynika to z Twierdzenia 5.1.5. Natomiast dla $n'_i \in \{1, 2\}$ równość otrzymujemy z Twierdzenia 5.1.6. Zatem

$$\frac{1}{2} \left((n'_i)^2 - \ell_{3i-2}^2 - \ell_{3i-1}^2 - \ell_{3i}^2 \right) \leq M(3, n'_i) - 1 = \left\lfloor \frac{(n'_i)^2}{3} \right\rfloor.$$

Stąd oraz z definicji liczb $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{3q}$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} q - 1 + M(3q, n) &= q + \frac{1}{2} \left(n^2 - \sum_{i=1}^{3q} \ell_i^2 \right) = q + \frac{n^2}{2} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{2} \left(-\ell_{3i-2}^2 - \ell_{3i-1}^2 - \ell_{3i}^2 \right) \\ &= q + \frac{n^2}{2} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{2} \left(-(n'_i)^2 + (n'_i)^2 - \ell_{3i-2}^2 - \ell_{3i-1}^2 - \ell_{3i}^2 \right) \\ &\leq q + \frac{n^2}{2} + \sum_{i=1}^q \left(-\frac{(n'_i)^2}{2} + \left\lfloor \frac{(n'_i)^2}{3} \right\rfloor \right). \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Ponieważ

$$\sum_{i=1}^q n'_i = \sum_{i=1}^q (\ell_{3i-2} + \ell_{3i-1} + \ell_{3i}) = \sum_{i=1}^{3q} \ell_i = n,$$

to z nierówność (5.4.11) wynika nierówność (5.4.10).

Udowodnimy teraz, że

$$\max_{n_1, n_2, \dots, n_q} \left\{ q + \frac{n^2}{2} - \sum_{i=1}^q \left(\frac{n_i^2}{2} - \left\lfloor \frac{n_i^2}{3} \right\rfloor \right) \right\} \leq q - 1 + M(3q, n).$$

Wybierzmy liczby $n'_1, n'_2, \dots, n'_q \in \{0, 1, \dots, n\}$ takie, że $\sum_{i=1}^q n'_i = n$ oraz

$$\max_{n_1, n_2, \dots, n_q} \left\{ q + \frac{n^2}{2} - \sum_{i=1}^q \left(\frac{n_i^2}{2} - \left\lfloor \frac{n_i^2}{3} \right\rfloor \right) \right\} = q + \frac{n^2}{2} - \sum_{i=1}^q \left(\frac{(n'_i)^2}{2} - \left\lfloor \frac{(n'_i)^2}{3} \right\rfloor \right). \quad (5.4.12)$$

Podobnie jak w dowodzie nierówności (5.4.10) skorzystamy z definicji funkcji M i formuły $M(3, k) = 1 + \left\lfloor \frac{k^2}{3} \right\rfloor$ dla dowolnej liczby $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Istnieją więc liczby $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{3q} \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ takie, że dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$

$$\ell_{3i-2} + \ell_{3i-1} + \ell_{3i} = n'_i \quad \text{oraz} \quad 1 + \frac{1}{2}(n_i'^2 - \ell_{3i-2}^2 - \ell_{3i-1}^2 - \ell_{3i}^2) = 1 + \left\lfloor \frac{(n'_i)^2}{3} \right\rfloor. \quad (5.4.13)$$

Z pierwszej z powyższych tożsamości oraz z równości $\sum_{i=1}^q n'_i = n$ wynika, że $\sum_{i=1}^{3q} \ell_i = n$. Zatem stosując wzór (5.4.12), drugą z równości w formule (5.4.13) oraz definicję funkcji $M(3q, n)$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \max_{n_1, n_2, \dots, n_q} \left\{ q + \frac{n^2}{2} - \sum_{i=1}^q \left(\frac{n_i^2}{2} - \left\lfloor \frac{n_i^2}{3} \right\rfloor \right) \right\} &= q + \frac{n^2}{2} - \sum_{i=1}^q \left(\frac{(n_i)^2}{2} - \left\lfloor \frac{(n'_i)^2}{3} \right\rfloor \right) \\ &= q + \frac{n^2}{2} - \sum_{i=1}^{3q} \frac{\ell_i^2}{2} \leq q - 1 + M(3q, n). \end{aligned}$$

To kończy dowód. □

Wniosek 5.4.8. Niech $\mathcal{A}$ będzie Ls_2 podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru. Wtedy

$$2 + \left\lfloor \frac{3n^2}{8} \right\rfloor \leq \dim \mathcal{A} \leq 2 + \left\lfloor \frac{5n^2}{12} \right\rfloor.$$

Dowód. Ponieważ każda D_2 algebra jest Ls_2 algebrą, to wymiar algebry $\mathcal{A}$ jest większy lub równy maksymalnemu wymiarowi D_2 podalgebry $M_n(K)$. Zatem z Wniosku 3.5.4 otrzymujemy nierówność $2 + \left\lfloor \frac{3n^2}{8} \right\rfloor \leq \dim \mathcal{A}$.

Pokażemy teraz drugą z nierówności. Na mocy Twierdzenia 5.4.1 każda Ls_2 algebra jest LD_2 algebrą. Zatem z Twierdzenia 5.4.6 i Stwierdzenia 5.4.7 otrzymujemy nierówność $\dim \mathcal{A} \leq 1 + M(6, n)$. Jeśli $n \geq 6$, to z uproszczonej formuły na funkcję $M(6, n)$ z Twierdzenia 5.1.5 wynika, że $1 + M(6, n) = 2 + \left\lfloor \frac{5n^2}{12} \right\rfloor$. Natomiast, gdy $n \in \{2, 3, 4, 5\}$, wtedy na mocy Twierdzenia 5.1.6 spełniona jest równość $1 + M(6, n) = 2 + \frac{n^2 - n}{2}$. Ponieważ dla dowolnej liczby $\ell \in \{2, 3, 4, 5\}$

$$2 + \frac{\ell^2 - \ell}{2} = 2 + \left\lfloor \frac{5\ell^2}{12} \right\rfloor,$$

to niezależnie od wartości liczby n otrzymujemy, że $1 + M(6, n) = 2 + \left\lfloor \frac{5n^2}{12} \right\rfloor$. Ostatnia równość w połączeniu z pokazaną wcześniej nierównością $\dim \mathcal{A} \leq 1 + M(6, n)$ daje nierówność $\dim \mathcal{A} \leq 2 + \left\lfloor \frac{5n^2}{12} \right\rfloor$. Dowód został zakończony. □

Dla $n \in \{2, 3, 4\}$ ograniczenia dolne i górne z Wniosku 5.4.8 są równe. Dla $n = 5$ otrzymujemy, że wymiar rozpatrywanej algebry $\mathcal{A}$ jest równy 11 lub 12, natomiast dla $n = 6$ wymiar algebry $\mathcal{A}$ jest równy 15, 16 lub 17.

Przykład 5.4.9. Podamy przykład LD_q podalgebry $\mathcal{A}$ algebry $M_n(K)$ wymiaru $q - 1 + M(3q, n)$. Na mocy Twierdzenia 5.4.6 oraz Stwierdzenia 5.4.7 taka algebra $\mathcal{A}$ jest LD_q podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru. Będzie ona w postaci

$$K \left(\sum_{i=1}^{n_1} e_{ii} \right) + K \left(\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} e_{ii} \right) + \dots + K \left(\sum_{i=n_1+\dots+n_{q-1}+1}^{n_1+\dots+n_q} e_{ii} \right) + J, \quad (5.4.14)$$

gdzie liczby naturalne $n_1, n_2, \dots, n_q$ takie, że $\sum_{i=1}^q n_i = n$ oraz podzbiór J macierzy ściśle górnotrójkątnych $n \times n$ określimy inaczej w zależności od dwóch przypadków. W każdym z nich $\mathcal{A}$ będzie podalgebrą $M_n(K)$ kształtu $(n_1, n_2, \dots, n_q)$ w postaci blokowo trójkątnej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{qq} \end{pmatrix}, \quad (5.4.15)$$

gdzie $\mathcal{A}_{ii}$ dla $i = 1, 2, \dots, q$ jest Ln_2 lub przemienne podalgebrą $M_{n_i}(K)$, natomiast $\mathcal{A}_{ij} = M_{n_i \times n_j}(K)$ dla $1 \leq i < j \leq q$.

a) Załóżmy, że $q \leq \frac{n}{3}$. Określmy wtedy pomocniczy ciąg liczb $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{3q})$ taki, że

$$\ell_i = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{3q} \right\rfloor & \text{dla } i \in \{1, 2, \dots, 3q - r\}, \\ \left\lfloor \frac{n}{3q} \right\rfloor + 1 & \text{dla } i \in \{3q - r + 1, 3q - r + 2, \dots, 3q\}, \end{cases}$$

gdzie r jest resztą z dzielenia liczby n przez $3q$. Zgodnie z Twierdzeniem 5.1.4 Ln_{3q-1} podalgebra $M_n(K)$ związana z kształtem $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{3q})$ jest Ln_{3q-1} podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru. Liczby $n_1, n_2, \dots, n_q$ z formuły (5.4.14) definiujemy wzorem

$$n_i = \ell_{3i-2} + \ell_{3i-1} + \ell_{3i}$$

dla $i = 1, 2, \dots, q$, a za J przyjmujemy podzbiór $U_n(K)$, dla którego $KI_n + J$ jest Ln_{3q-1} podalgebrą $M_n(K)$ związaną z kształtem $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{3q})$. Wtedy algebra $\mathcal{A}$ określona formułą (5.4.14) jest w postaci blokowej (5.4.15), w której dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ diagonalny blok $\mathcal{A}_{ii}$ jest Ln_2 podalgebrą $M_{n_i}(K)$ związaną z kształtem $(\ell_{3i-2}, \ell_{3i-1}, \ell_{3i})$. Stąd wynika, że $\mathcal{A}$ jest LD_q algebrą. Pozostało nam znaleźć jej wymiar. Z określenia mamy

$$\dim \mathcal{A} = q + \dim J.$$

Natomiast z tego, że $KI_n + J$ jest Ln_{3q-1} podalgebrą $M_n(K)$ maksymalnego wymiaru, to z Twierdzenia 5.1.3 wynika, że wymiar algebry $KI_n + J$ jest równy $M(3q, n)$. Zatem dostajemy, że

$$\dim J = M(3q, n) - 1.$$

Z dwóch powyżej wyszczególnionych równości otrzymujemy, że $\dim \mathcal{A} = q - 1 + M(3q, n)$, co mieliśmy pokazać.

b) Załóżmy, że $\frac{n}{3} < q \leq n$. Wtedy liczba $\left\lfloor \frac{n}{3q} \right\rfloor$ jest zerowa, więc nie możemy rozważać Ln_{3q-1} podalgebry używanej w poprzednim przykładzie. W tym przypadku określimy liczby $n_1, n_2, \dots, n_q$ z formuły (5.4.14) wzorem

$$n_i = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor & \text{dla } i \in \{1, 2, \dots, q-s\}, \\ \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 & \text{dla } i \in \{q-s+1, q-s+2, \dots, q\}, \end{cases}$$

gdzie s jest resztą z dzielenia n przez q . Tak zdefiniowane liczby spełniają równości

$$\sum_{i=1}^q n_i = (q-s) \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + s \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right) = q \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + s = n.$$

Za J przyjmijmy zbiór wszystkich macierzy ściśle górnotrójkątnych $n \times n$.

Z nierówności $\frac{n}{3} < q \leq n$ wynika, że $n_i \in \{1, 2, 3\}$ dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, q\}$. Możemy więc zapisać algebrę $\mathcal{A}$ określoną wzorem (5.4.14) w postaci blokowej (5.4.15), gdzie diagonalne bloki są równe K , $U_2^*(K)$ lub $U_3^*(K)$. Algebry K i $U_2^*(K)$ są przemienne, natomiast $U_3^*(K)$ jest Ln_2 algebrą. Stąd wynika, że $\mathcal{A}$ jest LD_q podalgebrą $M_n(K)$. Pozostało nam znaleźć jej wymiar. Z określenia $\mathcal{A}$ mamy

$$\dim \mathcal{A} = q + \dim J = q + \frac{n^2 - n}{2}.$$

Ponieważ $3q > n$, to z Twierdzenia 5.1.6 otrzymujemy równość $M(3q, n) = 1 + \frac{n^2 - n}{2}$. Zatem $\dim \mathcal{A} = q - 1 + M(3q, n)$, co mieliśmy pokazać.

Podobnie jak w przypadku D_q podalgebr $M_n(K)$, z Lematu 5.4.4 wynika, że nie istnieją LD_q podalgebry $M_n(K)$ dla $q > n$.

Postępując zgodnie z konstrukcją opisaną w podpunkcie a) Przykładu 5.4.9, dostajemy następującą LD_2 podalgebrę $M_7(K)$ maksymalnego wymiaru

$$K \begin{pmatrix} I_3 & 0_{3 \times 4} \\ 0_{4 \times 3} & 0_4 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 0_3 & 0_{3 \times 4} \\ 0_{4 \times 3} & I_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & K & K & K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & K & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & K & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Otrzymana algebra różni się jedynie wyrazami na przekątnej od Ln_5 podalgebry $M_7(K)$ związanej z kształtem $(1, 1, 1, 1, 1, 2)$. Co więcej, $\mathcal{A}$ jest w postaci blokowo trójkątnej $\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & M_{3 \times 4}(K) \\ 0_{4 \times 3} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}$, gdzie $\mathcal{A}_{11} = U_3^*(K)$ jest Ln_2 podalgebrą $M_3(K)$ związaną z kształtem $(1, 1, 1)$, natomiast $\mathcal{A}_{22}$ jest Ln_2 podalgebrą $M_4(K)$ związaną z kształtem $(1, 1, 2)$.

Postępując zgodnie z podpunktem b) Przykładu 5.4.9, otrzymujemy następującą LD_3 podalgebrę $M_7(K)$ maksymalnego wymiaru

$$K \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 & 0_{2 \times 3} \\ 0_2 & 0_2 & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & 0_3 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 & 0_{2 \times 3} \\ 0_2 & I_2 & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & 0_3 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 & 0_{2 \times 3} \\ 0_2 & 0_2 & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & I_3 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & K & K & K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & K & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & K & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tak utworzona algebra jest w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & M_{2 \times 2}(K) & M_{2 \times 3}(K) \\ 0_2 & \mathcal{A}_{22} & M_{2 \times 3}(K) \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & \mathcal{A}_{33} \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{A}_{11} = \mathcal{A}_{22} = U_2^*(K)$ są algebraami przemiennymi, natomiast $\mathcal{A}_{33} = U_3^*(K)$ jest Ln_2 algebra.

Bibliografia

- [1] E. Aljadeff, A. Giambruno, C. Procesi, A. Regev, *Rings with polynomial identities and finite dimensional representations of algebras*, American Mathematical Society, 2020.
- [2] A. L. Agore, “The maximal dimension of unital subalgebras of the matrix algebra”, *Forum Mathematicum* 29(1) (2017), s. 1–5.
- [3] P. N. Anh, L. van Wyk, “Automorphism groups of generalized triangular matrix rings”, *Linear Algebra and its Applications* 434(4) (2011), s. 1018–1026.
- [4] P. N. Anh, L. van Wyk, “Isomorphisms between strongly triangular matrix rings”, *Linear Algebra and its Applications* 438(11) (2013), s. 4374–4381.
- [5] K. I. Beidar, A. V. Mikhalev, “Generalized polynomial identities and rings which are sums of two subrings”, *Algebra and Logic* 34(1) (1995), s. 1–5.
- [6] A. Ya. Belov, “On non-Specht varieties”, *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika* 5(1) (1999), s. 47–66.
- [7] A. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, Biblioteka Matematyczna 48, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1976.
- [8] G. F. Birkenmeier, H. E. Heatherly, J. Y. Kim, J. K. Park, “Triangular Matrix Representations”, *Journal of Algebra* 230(2) (2000), s. 558–595.
- [9] A. R. Borges, C. Fidelis, D. Diniz, “Graded isomorphisms on upper block triangular matrix algebras”, *Linear Algebra and its Applications* 543 (2018), s. 92–105.
- [10] M. Brešar, *Introduction to Noncommutative Algebra*. Universitext, Springer, 2014.
- [11] W. C. Brown, “Two constructions of maximal commutative subalgebras of $n \times n$ matrices”, *Communications in Algebra* 22(10) (1994), 4051–4066.
- [12] R. C. Courter, “The dimension of maximal commutative subalgebras of K_n ”, *Duke Mathematical Journal* 32(2) (1965), s. 225–232.

- [13] S. Dăscălescu, L. van Wyk, “Do isomorphic structural matrix rings have isomorphic graphs?”, *Proceedings of the American Mathematical Society* 124(4) (1996), s. 1385–1391.
- [14] M. Domokos, “On the dimension of faithful modules over finite dimensional basic algebras”, *Linear Algebra and its Applications* 365 (2003), s. 155–157.
- [15] M. Domokos, M. Zubor, “Commutative subalgebras of the Grassmann algebra”, *Journal of Algebra and Its Applications* 14(8) (2015), s. 1550125 (13 stron).
- [16] V. Drensky, “A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0”, *Algebra and Logic* 20(3) (1981), s. 188–194.
- [17] V. Drensky, E. Formanek, *Polynomial identity rings*, Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona, Springer Basel AG, 2004.
- [18] M. Gerstenhaber, “On dominance and varieties of commuting matrices”, *Annals of Mathematics* 73(2) (1961), s. 324–348.
- [19] A. V. Grishin, “Examples of T-spaces and T-ideals over a field of characteristic 2 without the finite basis property”, *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika* 5(1) (1999), s. 101–118.
- [20] W. H. Gustafson, “Maximal commutative algebras of linear transformations”, *Journal of Algebra* 42(2) (1976), s. 557–563.
- [21] N. Jacobson, *PI-algebras : an introduction*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1975.
- [22] N. Jacobson, “Schur’s theorems on commutative matrices”, *Bulletin of the American Mathematical Society* 50(6) (1944), s. 431–436.
- [23] J. Kaplansky, “Rings with a polynomial identity”, *Bulletin of the American Mathematical Society* 54(6) (1948), s. 575–580.
- [24] A. R. Kemer, “Finite basis property of identities of associative algebras”, *Algebra and Logic* 26(5) (1987), s. 362–397.
- [25] M. Kępczyk, “A ring which is a sum of two PI subrings is always a PI ring”, *Israel Journal of Mathematics* 221(1) (2017), s. 481–486.
- [26] Y. Kobayashi, M. Tsukada, S. E. Takahasi, “A complete classification of three-dimensional algebras over $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ ”, *Asian-European Journal of Mathematics* 14(8) (2021), s. 2150131 (25 stron).

- [27] T. J. Laffey, “The minimal dimension of maximal commutative subalgebras of full matrix algebras”, *Linear Algebra and its Applications* 71 (1985), s. 199–212.
- [28] T.Y. Lam, *A first course in noncommutative rings : second edition*. Graduate Texts in Mathematics 131, Springer, 2001.
- [29] Yu. N. Maltsev, “Basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices”, *Algebra and Logic* 10(4) (1971), s. 242–247.
- [30] P. Matraś, L. van Wyk, M. Ziemkowski, “On the maximum dimensions of subalgebras of $M_n(K)$ satisfying two related identities”, *Linear Algebra and Its Applications* 698 (2024), s. 73–93.
- [31] P. Matraś, L. van Wyk, M. Ziemkowski, “The structure of subalgebras of full matrix algebras over a field satisfying the identity $[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_q, y_q] = 0$ ”, *Journal of Algebra* 651 (2024), s. 159–206.
- [32] J. Meyer, J. Szigeti and L. van Wyk, “A Cayley-Hamilton trace identity for 2×2 matrices over Lie-solvable rings”, *Linear Algebra and its Applications* 436(7) (2012), s. 2578–2582.
- [33] B. Peirce, *Linear associative algebra*, American Journal of Mathematics 4(1) (1881), 97–133.
- [34] R. S. Pierce, *Associative Algebras.*, Graduate Texts in Mathematics 81, Springer-Verlag, 1982.
- [35] C. Procesi, *Rings with polynomial identities*, Marcel Dekker, 1973.
- [36] H. Radjavi, P. Rosenthal, *Simultaneous Triangularization*. Universitext, Springer, 2000.
- [37] Yu. P. Razmyslov, “Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero”, *Algebra and Logic* 12(1) (1973), s. 47–63.
- [38] A. Regev, “Existence of identities in $A \otimes B$ ”, *Israel Journal of Mathematics* 11(2) (1972), s. 131–152.
- [39] A. Regev, “Existence of polynomial identities in $A \otimes_F B$ ”, *Bulletin of the American Mathematical Society* 77(6) (1971), s. 1067–1069.
- [40] L. H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, 1980.
- [41] I. Schur, *Zur Theorie vertauschbaren Matriz*, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 130 (1905), s. 66–76.

- [42] V. V. Shchigolev, “Examples of infinitely based T-ideals”, *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika* 5(1) (1999), s. 307-312.
- [43] J. Song, “ A construction of maximal commutative subalgebra of matrix algebras ”, *Journal of the Korean Mathematical Society* 40(2) (2003), 241–250.
- [44] W. Specht, “Gesetze in Ringen. I”, *Mathematische Zeitschrift* 52(1) (1950), s. 557–589.
- [45] J. Szigeti, J. van den Berg, L. van Wyk and M. Ziemkowski, “The maximum dimension of a Lie nilpotent subalgebra of $M_n(F)$ of index m ”, *Transactions of the American Mathematical Society* 372(7) (2019), s. 4553–4583.
- [46] J. Szigeti, S. Szilágyi, L. van Wyk, “A power Cayley-Hamilton identity for $n \times n$ matrices over a Lie nilpotent ring of index k ”, *Linear Algebra and its Applications* 584 (2020), s. 153–163.
- [47] J. Szigeti, L. van Wyk, “On Lie Nilpotent Rings and Cohen’s Theorem”, *Communications in Algebra* 43(11) (2015), s. 4783–4796.
- [48] S. H. Weintraub, *Galois Theory : second edition*. Universitext, Springer-Verlag, 2009.
- [49] L. van Wyk, M. Ziemkowski, “Lie solvability and the identity $[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_q, y_q]$ in certain matrix algebras”, *Linear Algebra and its Applications* 533 (2017), s. 235–257.
- [50] L. van Wyk, M. Ziemkowski, “Lie solvability in matrix algebras”, *Linear and Multilinear Algebra* 67(4) (2019), s. 777–798.